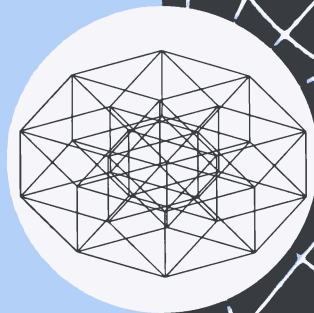
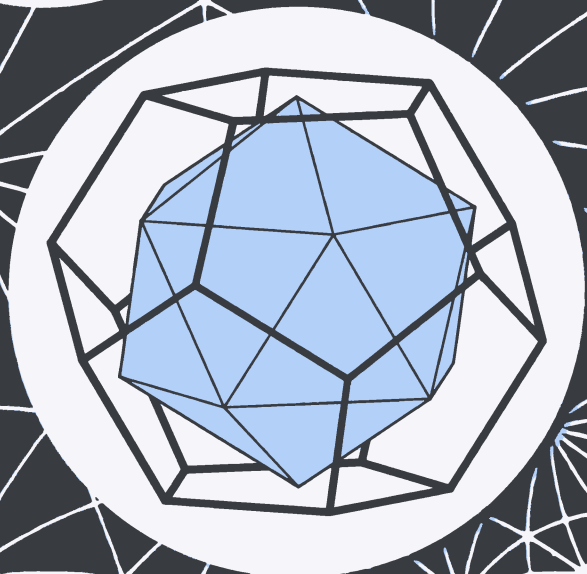


А. Б. Сосинский



ГЕОМЕТРИИ



А. Б. Сосинский

Геометрии

Перевод с английского
Б. Р. Френкина

Москва
Издательство МЦНМО
2017

УДК 514.1
ББК 22.15
С66

Сосинский А. Б.
С66 Геометрии / Перевод с англ. Б. Р. Френкина. — М.:
МЦНМО, 2017. — 263 с.

ISBN 978-5-4439-1168-7

Эта книга, основанная на лекциях, читавшихся автором на первом курсе Независимого московского университета, представляет собой введение в евклидову, сферическую, проективную и гиперболическую (Лобачевского) геометрию, написанное в синтетическом, бескоординатном стиле; по ходу дела читатель знакомится также с началами теории групп и узнает, в связи с чем эта теория возникла. Книга снабжена большим количеством упражнений, помогающих освоить материал.

Для студентов младших курсов, школьников старших классов и всех интересующихся математикой.

ББК 22.15

Translation from the English language edition:

Geometries by A. B. Sossinsky.

© 2012 by the American Mathematical Society. All rights reserved.

ISBN 978-5-4439-1168-7

© Сосинский А. Б., 2017.

ISBN 978-0-8218-7571-1 (англ.) © МЦНМО, перевод на рус. яз., 2017.

Оглавление

Предисловие к русскому изданию	4
Глава 0. О евклидовой геометрии	8
Глава 1. Симметрии простейших фигур и основные определения . . .	36
Глава 2. Абстрактные группы; задание групп определяющими соотношениями	53
Глава 3. Конечные подгруппы в группе $SO(3)$ и платоновы тела	66
Глава 4. Дискретные подгруппы в группе изометрий плоскости. Заключения	82
Глава 5. Группы отражений и геометрии Кокстера	93
Глава 6. Сферическая геометрия	102
Глава 7. Модель Пуанкаре гиперболической геометрии на круге	116
Глава 8. Модель Пуанкаре на полуплоскости	131
Глава 9. Модель Кэли—Клейна	138
Глава 10. Тригонометрия на гиперболической плоскости и абсолютные константы	146
Глава 11. История неевклидовой геометрии	157
Глава 12. Проективная геометрия	164
Глава 13. «Проективная геометрия — это вся геометрия»	180
Глава 14. Конечные геометрии	187
Глава 15. Иерархия геометрий	202
Глава 16. Морфизмы геометрий	212
Дополнение А. Извлечения из «Начал» Евклида	224
Дополнение Б. Аксиомы планиметрии Гильберта	237
Ответы и указания	247
Литература	259
Указатель терминов	260

Предисловие к русскому изданию

Разных геометрий много. В этой книге приводятся, как мне кажется, самые интересные и красивые.

Слово «геометрия» я понимаю не как название учебной или научной дисциплины (такой, как «дифференциальные исчисления»), а как математический объект (такой, как «дифференциал»). Объединяет различные геометрии то, что каждая из них, как указал Феликс Клейн в своей знаменитой *Эрлангенской программе* (1882 г.), представляет собой множество, на которое действует группа.

У геометрии, как и других важных объектов в математике, кроме индивидуальной жизни, есть и жизнь общественная: они входят в некоторый социум — категорию геометрий — в котором они взаимодействуют посредством морфизмов (так называемых эквивариантных отображений).

Слова группы, морфизмы, категории не должны ввести читателя в заблуждение: это не формально-алгебраическое или (Боже упаси) аналитическое (координатное) рассмотрение геометрических тем; достаточно взглянуть на многочисленные чертежи в нашей книге, чтобы понять, что мы постоянно придерживаемся зрительного, наглядного подхода.

Теория категорий не применяется в этой книге, но мы используем ее язык, — как читатель увидит, это очень естественно в геометрическом контексте. Так, известной фразе Кэли: «проективная геометрия — это вся геометрия» можно придать точный математический смысл с помощью термина *подгеометрия* (означающего «образ геометрии при инъективном эквивариантном отображении»). В контексте нашей книги можно перефразировать эти слова так: «геометрии, изучаемые в этой книге (включая три классические — гиперболическую, эллиптическую и евклидову), являются подгеометриями проективной геометрии».

В основном тексте книги очень мало сказано об аксиоматическом подходе к геометрии. Это одно из предубеждений автора: я считаю, что классические системы аксиом, например для евклидовой или гиперболической геометрии, безнадежно устарели и больше не принадлежат современной математике. Их место — в истории математики и в философии науки. Поэтому здесь они появляются лишь в одной главе, которая посвящена захватывающей истории со-

здания неевклидовой геометрии, а подробный разбор аксиоматики Евклида и Гильберта перенесен в дополнения А и Б.

Множественное число в заглавии книги (*Геометрии*) означает, что, на мой взгляд, нет такого учебного предмета, как «геометрия», но, как уже было сказано, существуют конкретные математические объекты, которые называются геометриями. В единственном числе слово «геометрия» нужно понимать как способ математического мышления, в действительности изначальный: в Древней Греции слово «геометрия» служило синонимом слова «математика». Можно и нужно мыслить геометрически, работая не только с окружностями и треугольниками, но и с коммутативными диаграммами, морфизмами и группами. Знаменитая фраза над входом в платоновскую Академию:

Не знающий геометрии да не войдет в Академию

должна быть помещена и на воротах, ведущих в мир математики.

* * *

В предисловии я не буду систематически излагать содержание курса, а отошлю читателя к оглавлению. У хорошо подготовленного читателя оно может вызвать такой вопрос: почему его любимые геометрии не всегда представлены в книге среди «интересных и красивых» геометрий, обещанных выше? Позвольте высказаться по поводу некоторых тем и объяснить, почему они здесь не рассматриваются.

Прежде всего, мы не рассматриваем ни аффинную, ни евклидову геометрию, ни геометрию векторного пространства, считая, что они известны читателю. Однако книга начинается с главы под номером нуль, в которой приводятся основные сведения из евклидовой планиметрии и кое-что из стереометрии. Это связано с тем, что в этой книге описания других геометрий предполагает знания элементарной евклидовой геометрии, а американские студенты (для которых предназначен оригинал этой книги), как правило плохо знакомы с элементарной геометрией. Я понимаю, что русскоязычный читатель в этом отношении гораздо лучше подготовлен, но все же решил оставить на месте эту главу. В любом случае предполагается, что читатель начнет книгу с главы 1, а будет обращаться к главе 0, как к справочнику в случае необходимости.

В этой книге отсутствует *алгебраическая геометрия*, поскольку автор считает, что эта прекрасная область математики принадлежит алгебре, а не геометрии. В самом деле, математики, занимающиеся алгебраической геометрией, — типичные алгебраисты, и это

верно в отношении не только великой французской школы (вслед за Гротендиком использующей его схемы), но и более классической российской школы.

Нет здесь и *дифференциальной геометрии*: классический случай малых размерностей обычно излагается в книгах по дифференциальному и интегральному исчислению (куда он на самом деле и относится), а современные исследования в более высоких размерностях являются частью анализа (под названием «анализ на многообразиях») и топологии (под названием «дифференциальная топология»).

Другие отсутствующие темы включают *выпуклую геометрию* (это часть анализа, а конкретнее — теории оптимизации, где она называется «выпуклый анализ»); *симплектическую геометрию* (это часть классической механики и теории динамических систем); *контактную геометрию* (это часть теории дифференциальных уравнений) и т. д.

Разумеется, контактная геометрия (например) формально является геометрией в смысле Клейна. И в действительности идеология групп преобразований исходит от Софуса Ли в не меньшей (если не большей) степени, чем от Феликса Клейна. Но контекст прекрасной контактной геометрии Ли — это, несомненно, дифференциальные уравнения.

* * *

Это книга основана на лекциях, прочитанных на русском языке в рамках семестровых курсов первого года в Независимом московском университете в 2003 и 2006 годах. Я подготовил их записи на «простом английском» и разместил на сайте НМУ. Эти записи опубликованы в виде 100-страничной брошюры в Московском центре непрерывного математического образования в 2006 г. и использовались при изучении геометрии в НМУ по программе «Math in Moscow».

Краткость семестрового курса (13 лекций) заставила меня при рассмотрении классических геометрий — таких, как гиперболическая и проективная, — ограничиться двумерным случаем, с сожалением исключив трехмерный. Однако в курсе остается много возможностей для развития пространственного воображения, а в общем случае все равно удобнее использовать линейно-алгебраический (координатный) подход, а не наглядно-синтетический, характерный для нашего курса. Читателю, желающему продвинуться

дальше, весьма рекомендую книгу Марселя Берже [1]. Должен добавить, что при всем отличии моего подхода я по существу обязан этой замечательной книге изложением некоторых разделов курса. Для тех, кто хочет больше узнать об аксиоматическом подходе к классическим геометриям, по моему мнению, нет книги лучше, чем «Высшая геометрия» Н. В. Ефимова [6].

Важной, если не самой важной, составляющей этого курса являются задачи, которые появляются в конце каждой главы. Именно решение этих задач научит читателя — гораздо больше, чем изучение теории, — мыслить и работать как геометр. Источники задач разнообразны. Многие были «украдены» из книг, написанных моим другом и любимым соавтором Виктором Прасоловым. Во многих случаях я просто не знаю первоначальное происхождение этих задач. Для использования на семинарских занятиях они были собраны вместе Ириной Парамоновой, которая добавила несколько задач, как и другие руководители семинарских занятий (Владимир Иванов и Олег Карпенков). Я благодарен всем людям, перечисленным выше, а также Михаилу Панову, Антону Понкрашову и Виктору Шувалову, создавшим компьютерные версии большинства иллюстраций; Марии Быковой, исправившей много ошибок в первоначальных записях; Виктору Прасолову, который нашел еще целый ряд ошибок в первом черновике книги; анонимным рецензентам, чья конструктивная критика оказала большую помощь. Наконец, я признателен Сергею Гельфанду, без чьей поддержки английский оригинал этой книги никогда не был бы написан, Юрию Торхову, без которого не было бы русского издания, и Борису Френкину, за аккуратный перевод оригинала.

Глава 0

О евклидовой геометрии

Первая глава этой книги — это глава 1 (см. ниже с. 36); глава с нулевым номером, которую вы читаете, содержит стандартный материал по евклидовой геометрии, который необходимо знать для понимания этой книги. Автор чувствует, что большинство читателей пропустят эту главу, даже если не получили в школе должную подготовку по евклидовой геометрии, и перейдут прямо к гл. 1. Некоторые конкретные факты из евклидовой геометрии кратко приводятся в основном тексте, если они требуются в дальнейшем изложении. Если же оказывается, что они неизвестны или подзабылись, то читатель может освежить их в памяти, обратившись к гл. 0 как к справочнику.

Мы излагаем евклидову планиметрию аксиоматически. Аксиоматика выбрана на основе клейновского подхода к геометрии, так что ключевую роль играют преобразования; при этом функция расстояния задана изначально, как сделано в школьных учебниках геометрии А. Н. Колмогорова. Наш подход предполагает знание вещественных чисел и их основных свойств, некоторое знакомство с языком наивной теории множеств (серьезное знакомство с самой теорией множеств не предполагается) и некоторый навык в логических рассуждениях, применяемых в математике (таких, например, как доказательство от противного, доказательство посредством перебора случаев и т. д.).

§ 0.1. Аксиомы евклидовой планиметрии

В рассматриваемой геометрии есть неопределяемые понятия трех видов: *точки*, *прямые линии* и (евклидова) *плоскость*. Точки обозначаются всевозможными заглавными латинскими буквами ($A, B, C, \dots, P, Q, \dots$, иногда с добавлением нижних или верхних индексов), прямые обозначаются строчным курсивом (l, m, n, \dots , также иногда с добавлением нижних или верхних индексов), а плоскость обозначается через \mathbb{E}^2 . Кроме того, задана *функция расстояния* d , которая каждой паре точек ставит в соответствие неотрица-

тельное вещественное число:

$$d: (A, B) \mapsto d(AB) \in \mathbb{R}_+.$$

В дальнейшем для расстояния $d(A, B)$ между двумя точками будем использовать и более традиционное обозначение $|AB|$.

Перечисленные объекты удовлетворяют следующим восьми аксиомам.

I. Плоскость \mathbb{E}^2 есть множество всех точек.

II. Семейство \mathcal{L} всех прямых состоит из некоторых непустых подмножеств плоскости \mathbb{E}^2 .

III. Для любых двух различных точек A и B существует одна и только одна прямая $l = AB \in \mathcal{L}$, содержащая эти две точки.

IV. Для любой прямой $l \in \mathcal{L}$ существует хотя бы одна точка $P \in \mathbb{E}^2$, не принадлежащая этой прямой.

Чтобы сформулировать следующую аксиому, нужно ввести определение. Две прямые l_1 и l_2 называются *параллельными*, если они совпадают или не имеют общих точек; если прямые l_1 и l_2 параллельны, пишем $l_1 \parallel l_2$.

V. Для любой точки $P \in \mathbb{E}^2$ и любой прямой $l \in \mathcal{L}$ существует одна и только одна прямая $l' \in \mathcal{L}$, параллельная прямой l и содержащая точку P .

VI. Функция расстояния d обладает следующими свойствами:

(i) $d(A, B) = 0$ в точности тогда, когда $A = B$;

(ii) $d(A, B) = d(B, A)$ для всех $A, B \in \mathbb{E}^2$;

(iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$ для всех $A, B, C \in \mathbb{E}^2$; точки A, B, C лежат на одной прямой в точности тогда, когда предыдущее неравенство обращается в равенство;

(iv) на прямой $l \in \mathcal{L}$ для любой точки P и любого положительного числа ρ существуют ровно две точки A и B , для которых $d(A, P) = d(P, B) = \rho$.

Для формулировки последних аксиом потребуются еще некоторые определения.

Это, во-первых, определение изометрии, играющее ключевую роль в подходе Клейна к исследованию евклидовой и других геометрий (см. § 1.4 в гл. 1). *Изометрия* — это биекция β (взаимно однозначное отображение на себя) плоскости \mathbb{E}^2 с условием сохранения расстояний:

$$d(\beta(P), \beta(Q)) = d(P, Q) \quad \text{для всех } A, B \in \mathbb{E}^2.$$

Следуя традиционной терминологии, мы часто будем называть подмножества плоскости \mathbb{E}^2 (геометрическими) фигурами. Две фигуры $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \subset \mathbb{E}^2$ называются конгруэнтными или равными, если существует изометрия φ плоскости, переводящая одну фигуру в другую: $\varphi(\mathcal{F}_1) = \mathcal{F}_2$.

Теперь определим отношение «между»: если для трех различных точек A, B, C выполнено равенство $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$, то мы говорим, что точка B лежит между точками A и C на прямой $l = AC$. (Заметим, что по аксиоме III мы имеем $l = AC = CA = AB = BA = BC = CB$.) Множество всех точек, лежащих между двумя различными точками A и B , обозначается (A, B) и называется интервалом с концами A и B . Добавив концы к интервалу (A, B) , получаем отрезок с концами A и B , который обозначается $[A, B]$. Две различные точки O и A задают луч с началом O , проходящий через A ; он обозначается $[O, A)$ и является объединением отрезка $[O, A]$ и всех точек B , для которых A лежит между O и B .

Замечание. В некоторых изложениях евклидовой геометрии (например у Гильберта, см. дополнение Б) отношение «между» считается неопределяемым. В наиболее элементарных учебниках планиметрии об этом отношении как таковом не говорится ничего, изложение существенно опирается на чертежи и точка считается лежащей между двумя другими, если она выглядит так на соответствующем чертеже.

Объединение двух лучей $[O, A)$ и $[O, B)$ с общим началом O называется углом и обозначается $\angle AOB$ или $\angle BOA$; точка O называется вершиной угла. Две пересекающиеся прямые $AA' \cap BB' = O$, где O лежит между A и A' , а также между B и B' , задают четыре угла: $\angle AOB, \angle A'OB', \angle AOB', \angle A'OB$; первые два, а также последние два называются вертикальными (один относительно другого). Два угла с общей стороной, расположенной между двумя другими их сторонами, называются соседними. Удалив общую сторону двух соседних углов, получаем угол, который называется (геометрической) суммой двух данных углов.

Две пересекающиеся прямые, которые образуют четыре конгруэнтных угла, называются перпендикулярными, а эти четыре угла называются прямыми углами. Если две стороны данного угла AOB лежат на одной прямой и не имеют общих точек, кроме вершины угла, то угол AOB называется развернутым.

Теперь мы готовы сформулировать предпоследнюю аксиому.

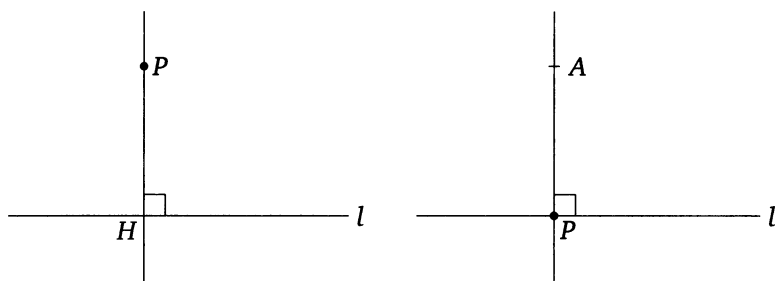


Рис. 0.1. Опущенный и восставленный перпендикуляры

VII. Для любой прямой $l \in \mathcal{L}$ и любой точки $P \in \mathbb{E}^2$ существует единственный перпендикуляр к l , содержащий P .

Отметим, что эта аксиома не уточняет, лежит P на l или нет, так что возможны две разные иллюстрации к ней (рис. 0.1). Традиционно при преподавании геометрии часто используется выражение *восставить перпендикуляр к l из P* во втором случае и *опустить перпендикуляр из P на l* в первом. В обоих случаях точку пересечения перпендикуляра с l часто называют *основанием* перпендикуляра.

Для формулировки последней аксиомы требуется еще одно очень важное определение. Пусть $l \in \mathcal{L}$ — прямая; тогда *отражением* от этой прямой называется соответствие $S_l: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, которое каждую точку прямой l оставляет на месте, а каждую точку $P \notin l$ переводит в точку $P' := S_l(P)$ на перпендикуляре из P на l , лежащую с другой стороны от основания перпендикуляра на том же расстоянии, что и P .

VIII. Отражение от любой прямой является изометрией.

Пусть l — любая данная прямая, а P — точка, не принадлежащая ей. *Полуплоскость*, заданная прямой l и точкой P , есть множество всех таких точек M на плоскости, что отрезок $[P; M]$ не пересекает l . Из определения отражения (с учетом аксиом) немедленно следует, что *отражение от l меняет местами две полуплоскости, заданные этой прямой*.

§ 0.2. Комментарий

0.2.1. Перечисленные выше аксиомы, за исключением аксиомы параллельных V, интуитивно очевидны. В стандартной школьной модели элементарной геометрии, где плоскость (точнее, ее часть) — это кусок бумаги, лежащий на плоском столе, точки от-

мечены на этой бумаге хорошо заточенным карандашом, прямые проведены карандашом, скользящим вдоль края линейки, а расстояния между точками измеряются обычным образом с помощью этой линейки, аксиомы I—IV и VI—VIII действительно можно воспринимать как экспериментальные факты. Это не относится к аксиоме параллельных (прямые бесконечно длинны, но мы не можем продолжить их «до бесконечности», чтобы на опыте убедиться, существуют ли параллельные и сколько их). Что касается аксиомы отражения (VIII), моделью для нее может служить кусок кальки, на котором проведена прямая и отмечена точка: поместим его на нашу «бумажную плоскость», на которой также проведена прямая l с отмеченной точкой, и совместим обе прямые и отмечены точки, а затем перевернем кальку и снова положим ее на бумажную плоскость так, чтобы прямые снова совпали. Если на бумажной плоскости дана точка P , а на кальке ей соответствует точка P_1 , то после переворачивания кальки точка P_1 будет играть роль образа P' точки P при отражении; сохранение расстояний представляется очевидным (кальку невозможно растянуть или сжать).

0.2.2. Независимость. Аксиомы I—VIII не являются независимыми: некоторые их утверждения можно вывести из других аксиом. Более того, неопределяемое понятие «прямая линия» в действительности можно строго определить с помощью аксиомы VI, понятия множества и неопределяемого понятия «точки». Если это сделать, аксиома III становится теоремой.

Гильберт построил строгую систему аксиом евклидовой геометрии (см. дополнение Б), в которой аксиомы независимы (в том смысле, что никакая аксиома не может быть логически выведена из всех остальных). Подход Гильберта принципиально важен для оснований математики, но не очень хорош в педагогическом смысле.

0.2.3. Непротиворечивость. Система аксиом, приведенная выше, *непротиворечива* (т. е. из нее нельзя вывести противоречие посредством логически корректных рассуждений), если непротиворечива теория вещественных чисел. Можно доказать это, построив модель этой системы аксиом, т. е. наделив неопределяемые понятия конкретным смыслом в теории вещественных чисел таким образом, чтобы аксиомы стали теоремами теории вещественных точек. Это делается следующим образом: неопределяемое понятие «плоскость» интерпретируется как \mathbb{R}^2 , т. е. как множество всех упорядоченных

пар вещественных чисел, «точки» — это пары $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, а «прямые» — множества таких пар, удовлетворяющие линейным уравнениям вида $\alpha x + \beta y + \gamma = 0$; функция расстояния задается формулой

$$d((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Непосредственно проверяется, что такие интерпретации неопределяемых понятий удовлетворяют аксиомам I—VIII.

0.2.4. Категоричность. Вышеприведенная система аксиом категорична, т. е. любые две ее интерпретации изоморфны в некотором естественном смысле, который мы здесь не уточняем, так же как не касаемся бесхитростного доказательства этого факта.

0.2.5. Зачем нужен аксиоматический подход? Читатель может поинтересоваться, почему евклидова планиметрия описана здесь аксиоматически, хотя можно сделать это гораздо проще, а именно положив $\mathbb{E}^2 := \mathbb{R}^2$, как описано в п. 0.2.3. На это имеются две причины. Первая — нужно отдать дань традиционному изложению геометрии (с которым, так или иначе, читатель уже имел дело). Вторая причина: по мнению автора, координатный подход в геометрии — жалкая карикатура на то, чем в действительности является евклидова геометрия.

При этом необходимо предупредить читателя, что наше изложение, вероятно, более строго и формализовано, чем в традиционных школьных учебниках, но и не столь подробно. В частности, доказательства либо даны в виде набросков, либо полностью опущены (но теоремы появляются в логической последовательности, так что каждая легко следует из предыдущих теорем и аксиом). Кроме того, в этой главе отсутствуют задачи.

§ 0.3. Повороты

0.3.1. Свойства изометрий. Любая изометрия

- (i) переводит прямые в прямые;
- (ii) переводит интервалы, отрезки, лучи соответственно в интервалы, отрезки, лучи;
- (iii) переводит параллельные прямые в параллельные;
- (iv) переводит перпендикуляры в перпендикуляры;
- (v) переводит углы в углы;

кроме того,

(vi) композиция (последовательное выполнение) двух изометрий является изометрией.

Все эти свойства непосредственно вытекают из соответствующих определений (и аксиом).

0.3.2. Определение поворотов. *Ориентированный угол* — это упорядоченная пара лучей с общим началом O (обозначается: $\angle([O, A), [O, B))$, точка O называется *вершиной* ориентированного угла). Пусть $\alpha := \angle([O, A), [O, B))$ — ориентированный угол, l и m — прямые OA и OB соответственно, причем $l \neq m$; тогда композиция отражений S_l и S_m от прямых l и m , выполненных в таком порядке, будет называться *поворотом* с центром O на угол 2α и обозначаться $R_{2\alpha}$. (Коэффициент 2 в последнем выражении — не опечатка: при взгляде на рис. 0.2 становится ясно, откуда он возникает.)

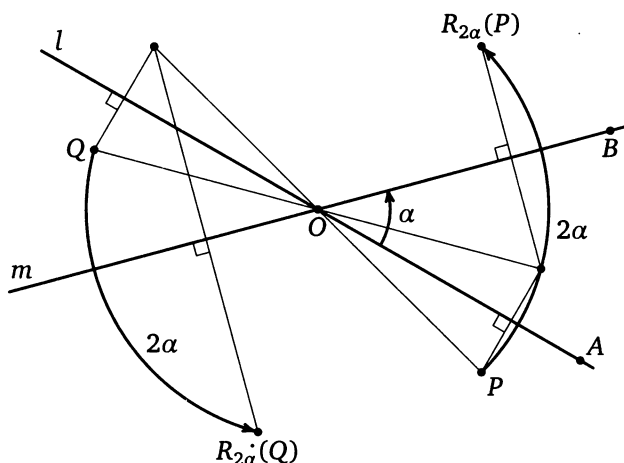


Рис. 0.2. Поворот на угол 2α

В частном случае, когда поворот определяется ориентированным углом $\alpha = \angle([O, A), [O, B))$, где прямые OA и OB перпендикулярны, такой поворот с центром O на угол 2α называется (*центральной*) *симметрией* с центром O и обозначается S_O .

Окружность с центром O и радиусом $r > 0$ есть множество всех точек M , для которых $|OM| = r$. Если дан поворот на некоторый угол $\alpha = \angle([O, A), [O, B))$, а также некоторая точка $P \neq O$, то ее образ P' при повороте $R_{2\alpha}$ заведомо лежит на окружности с центром O и радиусом $|OP|$, что обосновывает термин «поворот» (снова посмотрите на рис. 0.2). Точно так же очевидно, что образом точки $Q \neq O$ при симметрии S_O с центром O будет точка Q' на прямой OQ , для кото-

рой $|QO| = |OQ'|$, причем O лежит между Q и Q' , что снова служит обоснованием введенного термина.

Предложение 0.3.3. Повороты и центральные симметрии, будучи композициями изометрий, сами являются изометриями и потому обладают свойствами (i)—(v).

Теорема 0.3.4. Вертикальные углы конгруэнтны.

Для доказательства достаточно произвести симметрию с центром в вершине угла.

Пусть даны две параллельные, но не совпадающие прямые и еще одна прямая, которая их пересекает. Тогда эти три прямые определяют восемь углов (см. рис. 0.3), распадающихся на две четверки равных углов.

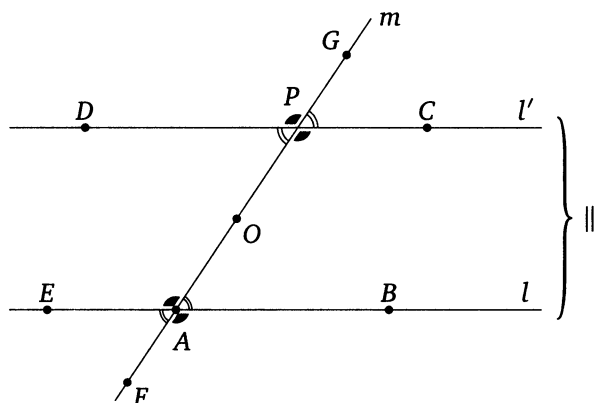


Рис. 0.3. Равные углы, образованные прямой, пересекающей две параллельные

Формально опишем ситуацию, показанную на рис. 0.3. Пусть $l = AB$ — прямая, P — точка, не принадлежащая ей, а l' — прямая, параллельная l и проходящая через P ; далее, пусть m обозначает прямую AP (пересекающую параллельные прямые l и l' в точках A и P); C — точка на l' с той же стороны от m , что и B ; D — такая точка на l' , что P лежит между C и D ; E — такая точка на l , что A лежит между E и B ; F — такая точка на m , что A лежит между F и P ; G — такая точка на m , что P лежит между G и A .

Теорема 0.3.5. В описанной ситуации следующие углы равны:

$$\begin{aligned}\angle DPA &\simeq \angle PAB \simeq \angle EAF \simeq \angle GPC, \\ \angle DPG &\simeq \angle FAB \simeq \angle EAP \simeq \angle APC.\end{aligned}$$

Чтобы доказать равенство $\angle PDA \simeq \angle APB$, произведем симметрию с центром в середине O отрезка $[A, P]$. Равенство $\angle DPA \simeq \angle GPC$ вытекает из теоремы 0.3.4, поскольку это вертикальные углы. Аналогично доказываются остальные равенства.

Следующее утверждение (о сумме углов треугольника) — одно из самых известных в евклидовой геометрии. Оно равносильно «Пятому постулату» Евклида или нашей аксиоме V. Треугольник ABC , где три точки A, B, C (его вершины) не лежат на одной прямой, определяется как объединение трех отрезков $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ (его сторон); углы ABC , BCA , CAB называются его (внутренними) углами.

Следствие 0.3.6. Сумма углов треугольника равна двум прямым углам.

Этот факт доказывается непосредственно: проведем через A прямую, параллельную BC , и применим теорему 0.3.4; мы видим (см. рис. 0.4), что три рассматриваемых угла сходятся в вершине A , образуя развернутый угол, т. е. два прямых угла.

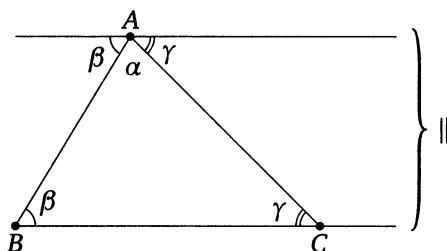


Рис. 0.4. Сумма углов треугольника

Заметим, что сумма здесь понимается как геометрическая сумма; позже, введя меру углов, мы сможем сказать в этой ситуации, что сумма мер углов равна 180 градусам или π радианам, в зависимости от выбранной единицы измерения.

Следствие 0.3.7. Если две различные прямые перпендикулярны одной и той же прямой, то они параллельны.

Это доказывается от противного исходя из предыдущего следствия.

0.3.8. Параллелограммы. Пусть даны четыре точки A, B, C, D , причем никакие три из них не лежат на одной прямой и никакие два из отрезков $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, D]$, $[D, A]$ не пересекаются, кроме как в общих концах. Если $AB \parallel CD$ и $BC \parallel DA$, то объедине-

ние этих четырех отрезков называется *параллелограммом*. Точки A, B, C, D называются *вершинами* параллелограмма, перечисленные четыре отрезка — его *сторонами*, а отрезки $[A, C]$ и $[B, D]$ — его *диагоналями*. Из теоремы 0.3.4 следует, что две пары противоположных углов параллелограмма $ABCD$, а именно $\angle ABD$ и $\angle CDB$, $\angle BAC$ и $\angle DCA$, конгруэнтны. Кроме того, пары противоположных сторон также конгруэнтны, но будет удобнее доказать это позже.

§ 0.4. Параллельные переносы и векторы

0.4.1. Определение параллельных переносов. Композиция отражений S_l и S_m , где (l, m) — упорядоченная пара параллельных прямых, определяет изометрию, которая называется *параллельным переносом*, заданным парой (l, m) . Если $l = m$, то соответствующий параллельный перенос — тождественный. Обычно, как читатель наверняка знает, параллельный перенос определяется через понятие вектора. Но мы еще не ввели понятие вектора и сделаем это лишь в следующем пункте.

0.4.2. Векторы. Упорядоченная пара точек $\{O, A\}$ называется (*закрепленным*) *вектором с началом в точке O* ; обозначим его через \overrightarrow{OA} . Используя диагональ параллелограмма, легко определить сумму двух векторов с общим началом (которая является вектором с тем же началом); используя аксиому расстояния, нетрудно определить умножение вектора на скаляр (т. е. на вещественное число), которое снова дает вектор с тем же началом. Легко доказать, что множество всех векторов с началом в данной точке евклидовой плоскости образует двумерное векторное пространство. Подробности предоставляются читателю.

Два вектора \overrightarrow{OA} и $\overrightarrow{O'A'}$ считаются *равными* или *эквивалентными* (обозначение $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O'A'}$), если $OA O' A'$ — параллелограмм либо если один из лучей $[O, A)$, $[O', A')$ содержит другой и $|OA| = |O' A'|$. Равенство векторов является отношением эквивалентности (т. е. оно симметрично, рефлексивно и транзитивно), поэтому множество всех векторов (с данным началом) распадается на классы эквивалентности; каждый класс эквивалентности

$$v := \{\overrightarrow{OA} : \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{O_0 A_0}\},$$

где O_0 и A_0 — данные точки, называется *свободным вектором*. Нетрудно определить сумму двух свободных векторов и умножение свободного вектора на скаляр, а затем доказать, что множество всех сво-

бодных векторов евклидовой плоскости образует двумерное векторное пространство. Снова предоставим подробности читателю.

0.4.3. Построение параллельных переносов. Пусть дан параллельный перенос $T: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, соответствующий упорядоченной паре параллельных прямых (l, l') . Пусть m — некоторый перпендикуляр к l , а A и A' — точки пересечения прямой m с l и l' соответственно. Число $|AA'|$ назовем *расстоянием между параллельными прямыми l и l'* . Докажем, что это число определено корректно, т.е. не зависит от выбора прямой m . Пусть m' — другой перпендикуляр к l , пересекающий l и l' в точках B и B' соответственно. Тогда из теоремы 0.3.4 и следствия 0.3.6 вытекает, что m и m' перпендикулярны к l' и параллельны друг другу. Далее, симметрия с центром в середине O диагонали AB' переводит $[A, A']$ в $[B', B]$ (как нетрудно доказать), поэтому $|AA'| = |B'B|$, что и требуется. Если теперь взять произвольную точку P и обозначить через $P' = T(P)$ ее образ при параллельном переносе, заданном упорядоченной парой параллельных прямых (l, l') , то, как нетрудно видеть, $|PP'| = 2|AA'|$.

Мы только что показали, что любой (свободный) вектор \mathbf{v} , в частности соответствующий закрепленному вектору $\overrightarrow{AA'}$, задает параллельный перенос $T_{\mathbf{v}}: \mathbb{E}^2 \rightarrow \mathbb{E}^2$, при котором образ каждой точки P — это конец данного вектора с началом P , т.е. $T_{\mathbf{v}}(P) := Q$, где $\overrightarrow{PQ} \in \mathbf{v}$. Такое построение параллельного переноса, несомненно, знакомо читателю. Легко доказывается

Теорема 0.4.4. *Любой параллельный перенос является изометрией. Композиция двух параллельных переносов есть параллельный перенос, заданный суммой двух векторов, задающих данные переносы.*

§ 0.5. Свойства треугольника. Конгруэнтность треугольников

0.5.1. Признаки равенства треугольников. В этом пункте, используя свойства параллельных переносов, поворотов и отражений, мы получим три классических признака равенства треугольников. Называют их по-разному: в континентальной Европе просто нумеруют («первый признак», «второй признак», «третий признак»), а в США используют более информативные обозначения SAS, ASA, SSS (например, SAS означает side-angle-side — «сторона-угол-сторона»). Во всех трех случаях мы рассматриваем два данных треугольника ABC и $A'B'C'$ и обозначаем углы в $\triangle ABC$ через $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle ACB$, а в $\triangle A'B'C'$ аналогично через α' , β' , γ' .

Теорема 0.5.2 (SAS). Если в треугольнике один угол и две его стороны соответственно равны углу и его сторонам в другом треугольнике, то треугольники конгруэнтны.

В наших обозначениях можно записать условие теоремы как

$$\alpha \simeq \alpha', \quad [A, B] \simeq [A', B'], \quad [A, C] \simeq [A', C'].$$

Параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{AA'}$, а затем соответствующий поворот отображают $[A, B]$ на $[A', B']$; обозначим через C'' образ точки C при композиции такого переноса и поворота. Далее возможны два случая соответственно тому, с какой стороны от $A'B'$ лежит C'' . Если C'' лежит с той же стороны, что и C' , то эти точки совпадают и все доказано. Если нет, то вначале выполним отражение от прямой $A'B'$, после чего образ точки C'' совпадет с C' . Заметим, что мы последовательно пользовались тем, что рассматриваемые преобразования — изометрии.

Теорема 0.5.3 (ASA). Если сторона данного треугольника и углы с вершинами в ее концах соответственно равны стороне другого треугольника и углам с вершинами в ее концах, то эти треугольники конгруэнтны.

Доказательство этой теоремы, так же как и следующей, аналогично доказательству теоремы 0.5.2.

Теорема 0.5.4 (SSS). Если три стороны данного треугольника соответственно равны трем сторонам другого треугольника, то эти треугольники конгруэнтны.

Замечание 0.5.5. Не существует «четвертого признака равенства треугольников» (ASS): не всегда верно, что если у двух треугольников равны две стороны и угол, то они конгруэнтны. См. рис. 0.5.

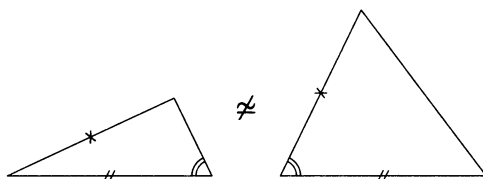


Рис. 0.5. Неконгруэнтные треугольники

Замечание 0.5.6. Существует другая формулировка признаков равенства треугольников: вместо равенства (в смысле конгруэнтности) сторон и/или углов можно говорить о равенстве длин сторон

и угловых мер. Мы пока не можем этого делать, так как еще не ввели «меру угла».

0.5.7. Замечательные прямые в треугольнике и замечательные треугольники. Пусть дан произвольный треугольник ABC . Опустив перпендикуляры из вершин на противоположные стороны, получаем три отрезка $[A, H]$, $[B, I]$, $[C, J]$, которые называются *высотами* треугольника. Прямые AR , BS , CT , которые делят углы треугольника ABC на пары равных углов, называются его *биссектрисами*. Прямые AM , BN и CP , которые соединяют вершины с серединами M , N и P противоположных сторон, называются *медианами* треугольника (см. рис. 0.6).

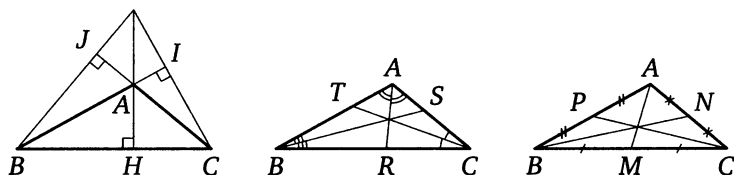


Рис. 0.6. Высоты, медианы и биссектрисы треугольника

Позже мы докажем, что каждая тройка этих замечательных линий пересекается в одной точке.

Треугольник называется *равнобедренным*, если две его стороны равны (эти стороны называются *боковыми*, а третья — *основанием*). Треугольник называется *равносторонним*, если все три его стороны равны.

Теорема 0.5.8. В равнобедренном треугольнике углы при основании конгруэнтны, а медиана, проведенная к основанию, совпадает с соответствующей высотой и биссектрисой.

Для доказательства надо провести медиану к основанию и применить третий признак равенства треугольников к $\triangle ABM$ и $\triangle ACM$.

Теорема 0.5.9. В равностороннем треугольнике все три угла равны, а все медианы совпадают с соответствующими высотами и биссектрисами.

Это вытекает из предыдущей теоремы.

§ 0.6. Гомотетия и подобие

0.6.1. Гомотетия. Гомотетия с центром O и коэффициентом $\rho > 0$ — это преобразование, переводящее каждую точку P в ко-

нец P' вектора $\overrightarrow{OP'}$, где

$$\overrightarrow{OP'} := \rho \cdot \overrightarrow{OP}.$$

Фигуры, которые переходят друг в друга при гомотетии, называются *гомотетичными*. Гомотетия с коэффициентом $\rho = 1$ — тождественное отображение; если $\rho > 1$, то размер фигуры увеличивается, но форма сохраняется; если же $\rho < 1$, то форма также сохраняется, а размер уменьшается. Из определения гомотетии (с учетом аксиом) непосредственно вытекают следующие ее свойства.

Предложение 0.6.2. *Любая гомотетия:*

- (i) переводит прямые в прямые, отрезки в отрезки, лучи в лучи;
- (ii) переводит параллельные прямые в параллельные;
- (iii) переводит перпендикуляры в перпендикуляры, углы в равные им углы;
- (v) переводит треугольники в треугольники;
- (vi) переводит окружности в окружности.

0.6.3. Подобие. Любая композиция изометрий и гомотетий называется *подобием*. Две фигуры, которые переходят друг в друга при подобии, называются *подобными*. Подобие фигур соответствует интуитивному представлению об одинаковой форме. Из приведенного определения вытекает, что *любое подобие обладает свойствами (i)–(vi), перечисленными в предложении 0.6.2, причем композиция подобий является подобием и каждому подобию соответствует коэффициент подобия $\rho > 0$, для которого $|P'Q'| = \rho \cdot |PQ|$, где P, Q — произвольные точки, а P', Q' — их образы при данном подобии.*

Следующие теоремы можно назвать признаками подобия треугольников.

Теорема 0.6.4. *Два треугольника ABC и $A'B'C'$, для которых*

$$\frac{|AB|}{|A'B'|} = \frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|CA|}{|C'A'|} = \text{const} =: \rho, \quad \text{подобны.}$$

Для доказательства подвергнем треугольник $A'B'C'$ гомотетии с коэффициентом ρ и произвольным центром, а затем применим третий признак равенства треугольников (теорема 0.5.4, SSS).

Теорема 0.6.5. *Если у двух треугольников все три угла соответственно равны, то треугольники подобны.*

На самом деле достаточно потребовать равенство двух углов, поскольку тогда третьи углы равны автоматически (по следствию 0.3.6). Пусть углы при вершинах A, B, C треугольника ABC соответственно

равны углам при вершинах A' , B' , C' треугольника $A'B'C'$. Для доказательства теоремы применим гомотетию с коэффициентом $\rho := \frac{|AB|}{|A'B'|}$, а затем применим второй признак равенства треугольников.

0.6.6. Прямоугольные треугольники. Треугольник называется *прямоугольным*, если один из его углов прямой; противолежащая ему сторона называется *гипотенузой*, а остальные две стороны — *катетами*. Поскольку сумма углов треугольника равна двум прямым углам, остальные два угла должны быть *острыми*, т. е. их угловая мера (см. п. 0.7.2) меньше $\pi/2$. Следующий факт непосредственно вытекает из теоремы 0.6.5.

Следствие 0.6.7. Если острый угол прямоугольного треугольника равен острому углу другого прямоугольного треугольника, то эти треугольники подобны.

Завершим этот пункт одной из знаменитейших геометрических теорем, обычно приписываемой Пифагору, хотя древние египтяне и вавилоняне знали ее задолго до Пифагора.

Теорема 0.6.8 (Пифагор, V в. до н.э.). В прямоугольном треугольнике квадрат (длины) гипотенузы равен сумме квадратов (длин) катетов.

У этой теоремы много доказательств; читатель легко найдет сайт, содержащий 93 (!) ее доказательства. Наиболее популярно то, которое показано на рис. 0.7 (и известно российским школьникам

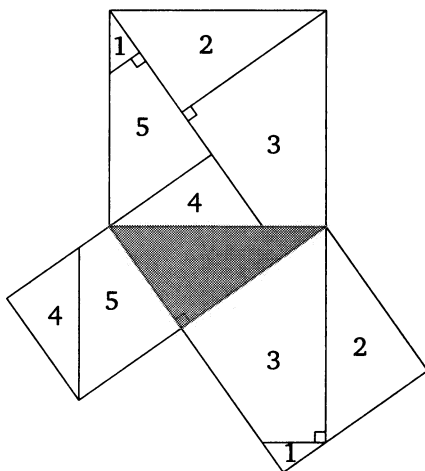


Рис. 0.7. Пифагоровы штаны

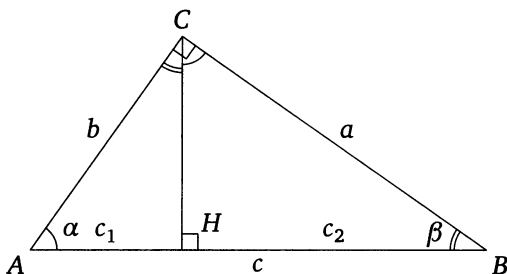


Рис. 0.8. Доказательство теоремы Пифагора

как «Пифагоровы штаны»), но оно опирается на понятие площади, которое мы еще не ввели.

Вместо этого мы можем сейчас дать простое доказательство, основанное на подобии. Пусть $\triangle ABC$ — треугольник с прямым углом при вершине C , углами α при вершине A и β при вершине B , гипотенузой c и катетами a и b . Опустим перпендикуляр CH из C на AB , где $H \in [A, B]$; положим $h := |CH|$, $c_1 := |AH|$ и $c_2 := |HB|$. Получаем два прямоугольных треугольника, подобных $\triangle ABC$, откуда $b/c_1 = c/b$ и $a/c_2 = c/a$, а поэтому $a^2 = cc_2$ и $b^2 = cc_1$. Сложив два последних равенства и учитывая, что $c = c_1 + c_2$, получаем $a^2 + b^2 = c^2$.

§ 0.7. Измерение углов и тригонометрия

0.7.1. Измерение углов в градусах. Традиционная угловая мера пришла из навигации, где единицей измерения служит градус. Разделив окружность на 360 равных дуг и рассмотрев угол между двумя лучами, соединяющими центр O окружности с концами такой дуги, получаем угол в один градус (1°); если взять, например, концы семнадцати соседних дуг A_1, A_2, \dots, A_{18} , то величина угла OA_1A_{18} будет равна 17° , и т. д. Прямые углы равны 90° , так что углы в 180° , стороны которых лежат на одной прямой, — это как раз те, о которых во времена Евклида говорили, что они «составляют два прямых угла». Градусы делятся на «минуты», а минуты на «секунды», но нам эти более мелкие меры не потребуются.

0.7.2. Измерение углов в радианах. Более современная и с математической точки зрения более удобная единица измерения — радиан. Обычно он определяется в курсах анализа, но здесь мы определим радиан как единицу измерения углов, пропорциональную градусам, для которой угол в 180° равен углу в π радиан. Матема-

тики предпочитают радианы градусам и обычно говорят, например, «этот угол равен π », а не «этот угол равен 180° ».

0.7.3. Тригонометрия треугольника. В элементарной геометрии (и в нашем изложении) рассматриваются лишь углы неотрицательной величины, не превосходящей 180° . Соответственно и тригонометрические функции будут определены лишь для углов треугольников (более общий случай тригонометрических функций от произвольных значений аргумента обычно изучается в курсах анализа). Пусть дан прямоугольный треугольник HAB с гипотенузой $[A, B]$ длины h и катетами $[H, A]$ и $[H, B]$ длины a и b . Определим тригонометрические функции синус, косинус и тангенс угла $\alpha = \angle ABH$ как следующие отношения:

$$\sin \alpha := b/h, \quad \cos \alpha := a/h, \quad \operatorname{tg} \alpha := b/a.$$

Из этих определений непосредственно следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin \alpha, \quad \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1.$$

В произвольном треугольнике (с углами α, β, γ и противоположными сторонами длины a, b, c) выполняются классические соотношения между длинами сторон и синусами (или косинусами) углов.

Теорема 0.7.4 (теорема синусов).

$$\frac{\sin \alpha}{a} = \frac{\sin \beta}{b} = \frac{\sin \gamma}{c}.$$

Для доказательства опустим на AB перпендикуляр CH , где H лежит на прямой AB ; пусть $h := |CH|$; образуются два прямоуголь-

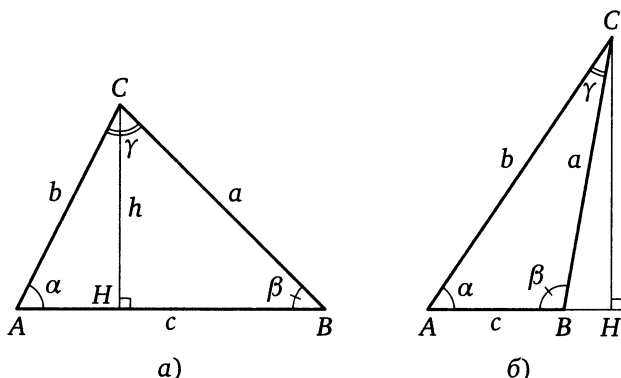


Рис. 0.9. Доказательство теорем синусов и косинусов

ных треугольника, из которых получаем (по определению синуса) $\sin \alpha = h/b$ и $\sin \beta = h/a$ (см. рис. 0.9 а, где показан случай $H \in [A, B]$; в случае, показанном на рис. 0.9 б, те же равенства выводятся несколько иным способом). Из этих равенств без труда получаем соотношения $\sin \alpha/a = \sin \beta/b$. Второе соотношение доказывается аналогично.

Теорема 0.7.5 (теорема косинусов).

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha.$$

Используем то же построение, что в предыдущем доказательстве. Положим $c_1 := [A, H]$ и $c_2 := [H, B]$ (так что $c = c_1 + c_2$) и применим теорему Пифагора к двум прямоугольным треугольникам (рис. 0.9 а). Получаем $a^2 = c_2^2 + h^2$ и $b^2 = c_1^2 + h^2$; в силу определения косинуса $\cos \alpha = c_1/b$. Из этих трех равенств простыми преобразованиями получаем нужный результат. В случае, показанном на рис. 0.9 б, тот же результат выводится несколько иначе.

§ 0.8. Свойства окружности

Напомним, что *окружностью* с центром O и радиусом $r > 0$ называется множество всех таких точек M , что $|OM| = r$. Если A и B — точки окружности, то отрезок $[A, B]$ называется *хордой*. Если $[A, B]$ содержит центр O , то, очевидно, O — середина отрезка $[A, B]$, который называется *диаметром* окружности. Если $[A, B]$ — хорда, а C — точка на окружности, то мы говорим, что угол CAB *стягивает хорду* $[A, B]$ (или *опирается* на нее).

Теорема 0.8.1. *Прямая, соединяющая середину хорды с центром окружности, перпендикулярна хорде.*

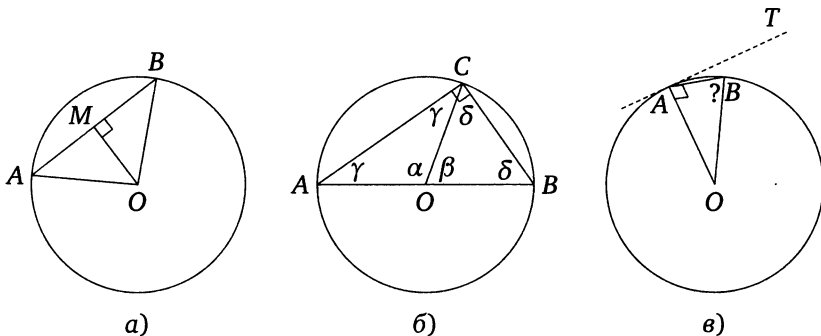


Рис. 0.10. Прямые углы в круге

Пусть M — середина хорды $[A, B]$ (рис. 0.10 а); тогда треугольники OAM и OBM равны по третьему признаку равенства треугольников SSS (теорема 0.5.4), поэтому два угла при точке M равны и, значит, они оба прямые.

Теорема 0.8.2. *Любой угол, опирающийся на диаметр окружности, прямой.*

Пусть $[A, B]$ — диаметр, а C — точка на окружности (рис. 0.10 б). Соединим C с O , и пусть α и β — два полученных угла при точке O . Тогда $\alpha + \beta = \pi$ (по следствию 0.3.5). Пусть γ и δ — величины двух равных углов в равнобедренных треугольниках OAC и OBC соответственно. Тогда $\alpha + 2\gamma = \pi$ и $\beta + 2\delta = \pi$. Исключив α и β из этих двух равенств и подставив выражения для них в равенство $\alpha + \beta = \pi$, получаем $\gamma + \delta = \pi/2$, что и требовалось.

Прямая называется *касательной* к окружности, если она имеет только одну общую точку с окружностью.

Теорема 0.8.3. *Любая прямая, проходящая через точку на окружности и перпендикулярная радиусу, проведенному через эту точку, является касательной к окружности.*

Предположим противное. Пусть B — точка пересечения прямой с окружностью, отличная от A , где A — конец данного радиуса (рис. 0.10 в). Тогда треугольник OAB равнобедренный и его углы при точках A и B прямые. Но это значит, что сумма его углов больше, чем два прямых угла, что противоречит следствию 0.3.6.

Теорема 0.8.4. *Пусть две прямые проходят через точку T , лежащую вне окружности с центром O , и касаются этой окружности в точках A и B . Тогда отрезки $[T, A]$ и $[T, B]$ равны, а луч $[T, O)$ является биссектрисой угла ATB , т. е. углы ATO и BTO равны.*

Это непосредственно следует из конгруэнтности треугольников TAO и TBO (см. рис. 0.11).

Окружность называется *вписанной* в треугольник, если она касается всех трех его сторон, и *описанной*, если она проходит через все его вершины.

Теорема 0.8.5. *Три биссектрисы произвольного треугольника пересекаются в одной точке, и эта точка — центр вписанной окружности треугольника.*

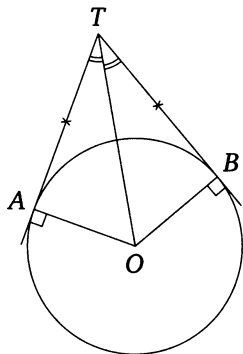


Рис. 0.11. Равные углы в круге

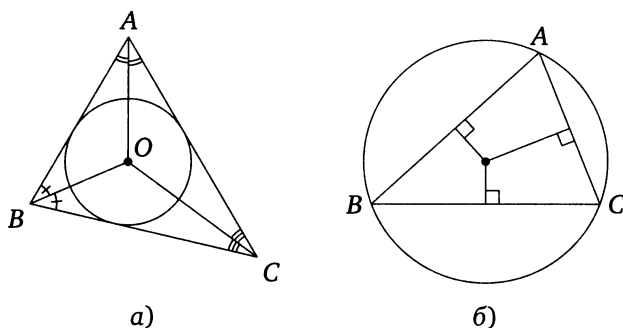


Рис. 0.12. Описанная и вписанная окружность

Это непосредственно следует из теоремы 0.8.4 (см. рис. 0.12 а).

Теорема 0.8.6. Три серединных перпендикуляра к сторонам треугольника [т. е. три перпендикуляра к сторонам, проходящие через их середины] пересекаются в одной точке, и эта точка — центр описанной окружности треугольника.

Это непосредственно следует из теоремы 0.8.1.

Теорема 0.8.7. Равные хорды окружности стягиваются равными углами.

Пусть D и C — точки окружности, а $[A, B]$ — ее хорда, причем D и C лежат по одну сторону от прямой AB (последнее допущение неявно содержится в утверждении теоремы). Соединим точки A, B, C, D с центром O окружности, получив тем самым пять рав-

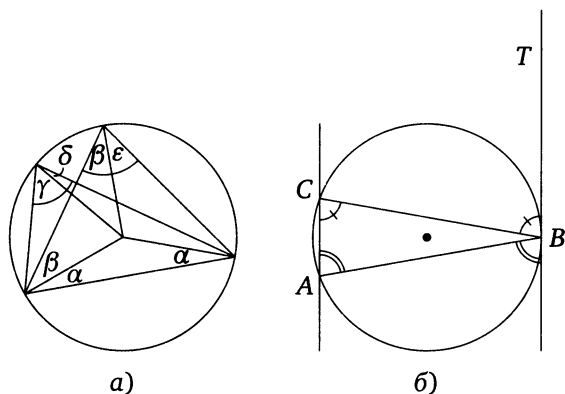


Рис. 0.13. Равные углы в окружности

нобедренных треугольников. Обозначим углы при их основаниях через $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$, как показано на рис. 0.13 а. Поскольку сумма углов каждого из треугольников ABC и ABD равна π , получаем

$$2\alpha + 2\beta + 2\epsilon = \pi, \quad 2\alpha + 2\gamma + 2\delta = \pi.$$

Вычтя второе равенство из первого и разделив на 2, получаем $\beta + \epsilon = \gamma + \delta$, что и требовалось.

Теорема 0.8.8. Пусть угол CAB стягивает хорду $[A, B]$ окружности, и пусть BT — касательная к окружности в точке B , причем T лежит с той же стороны от AB , что и C (см. рис. 0.13 б). Тогда углы ACB и CBT равны.

Согласно предыдущей теореме можно без потери общности считать, что AC и BT параллельны. Тогда нужное равенство следует из свойства секущих при параллельных прямых (теорема 0.3.4.).

§ 0.9. Изометрии плоскости

Напомним, что изометрия плоскости — это преобразование плоскости, сохраняющее расстояния. Любая изометрия является биекцией плоскости на себя. Мы уже встречали примеры изометрий: параллельные переносы, повороты и отражения от прямой. Другой тип изометрий описан в следующем пункте.

0.9.1. Скользящая симметрия. По определению скользящая симметрия $GF(l, \vec{v})$ — это композиция отражения от прямой l и параллельного переноса на вектор \vec{v} , параллельный этой прямой. Как

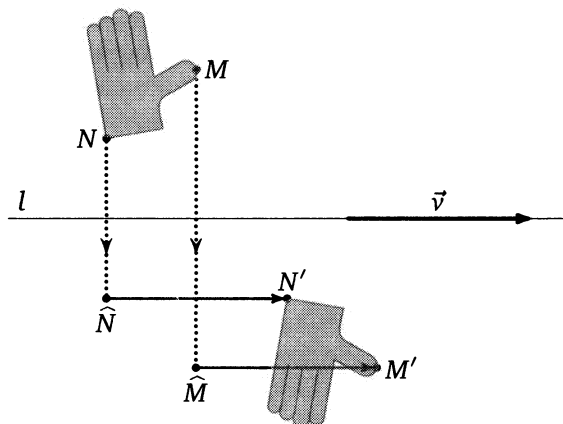


Рис. 0.14. Скользящая симметрия

можно видеть на рис. 0.14, скользящие симметрии меняют ориентацию (правая рука переходит в левую). Если $\vec{v} = 0$, то, разумеется, скользящая симметрия $GF(\vec{v})$ — это просто отражение от прямой l .

Следующая теорема — основная теорема о строении изометрий плоскости — утверждает, что не существует изометрий, кроме трех типов, перечисленных выше.

Теорема 0.9.2. *Любая изометрия плоскости — либо параллельный перенос, либо поворот, либо скользящая симметрия.*

Пусть OAB — ортонормированный репер (это означает, что отрезок $[O, A]$ перпендикулярен $[O, B]$ и $|OA| = |OB| = 1$); тогда положение произвольной точки M на плоскости определяется ее декартовыми координатами (x, y) по отношению к этому реперу. Пусть $O'A'B'$ — образ репера OAB , а M' — образ точки M при данной изометрии. Тогда точка M' имеет координаты (x, y) по отношению к $O'A'B'$. Это означает, что *любая изометрия полностью определяется ортонормированным репером и его образом.*

Итак, пусть $O'A'B'$ — образ ортонормированного репера OAB . Рассмотрим несколько случаев.

Сначала рассмотрим случай, когда прямые OA и $O'A'$ не параллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке P . Построим окружность, описанную около треугольника $OO'P$, и пусть Q — точка пересечения этой окружности с серединным перпендикуляром к OO' , причем Q лежит по ту же сторону от OO' , что и P . Тогда поворот на угол $([QO], [QO'])$ переводит O в O' и A в A' (поскольку углы QOP и $QO'P$ равны как стягивающие одну и ту же хорду $[Q, P]$, см. теорему 0.8.7).

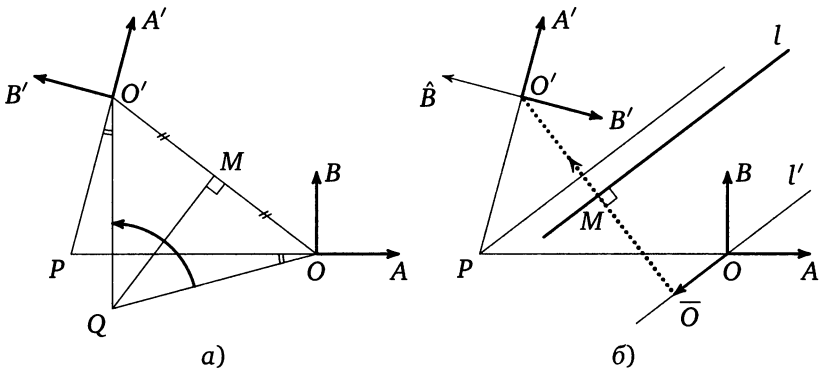


Рис. 0.15. $\overrightarrow{OA} \nparallel \overrightarrow{O'A'}$: поворот и скользящая симметрия

Далее, возможны два подслучая (см. рис. 0.15 а и б): либо только что построенный поворот переводит B в B' (тогда теорема доказана, так как поворот переводит данный репер в его образ при данной изометрии и потому изометрия совпадает с этим поворотом), либо он переводит B в точку \hat{B} , симметричную точке B' относительно прямой $O'A'$.

Во втором подслучае произведем другое построение. Через точку P проведем биссектрису угла OPO' , а через точку O — прямую l' , параллельную этой биссектрисе. Пусть \bar{O} — основание перпендикуляра, опущенного из O' на l' , M — середина отрезка $[O, \bar{O}]$, а l — проходящая через M прямая, параллельная l' . Тогда легко видеть, что скользящая симметрия $(l; \vec{v})$, где $\vec{v} = \overrightarrow{\bar{O}\bar{O}}$, переводит репер OAB в $O'A'B'$, что доказывает теорему и для этого подслучая.

Теперь перейдем к случаю, когда прямые OA и $O'A'$ параллельны. Положим

$$e_1 := \overrightarrow{OA}, \quad e_2 := \overrightarrow{OB}, \quad e'_1 := \overrightarrow{O'A'}, \quad e'_2 := \overrightarrow{O'B'}.$$

Рассмотрим четыре подслучая:

(1) векторы каждой из пар $(e_1; e'_1)$ и $(e_2; e'_2)$ направлены противоположно;

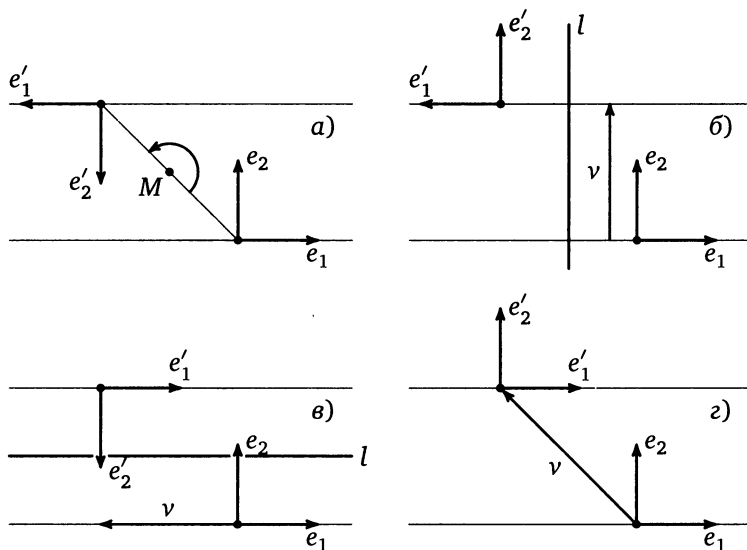


Рис. 0.16. $\overrightarrow{OA} \parallel \overrightarrow{O'A'}$: поворот, скользящие симметрии и параллельный перенос

(2) векторы первой пары направлены противоположно, а второй — одинаково;

(3) векторы первой пары направлены одинаково, а второй — противоположно;

(4) векторы каждой пары направлены одинаково.

В подслучае (1) поворот на угол π вокруг середины отрезка $[O, O']$ переводит репер OAB в $O'A'B'$ (рис. 0.16 а), в подслучаях (2) и (3) для этого служат скользящие симметрии (рис. 0.16 б, в), а в подслучае (4) — параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{OO'}$ (рис. 0.16 г).

§ 0.10. Геометрия пространства

В этом пункте мы не предполагаем излагать евклидову стереометрию (или хотя бы суммировать ее основные конструкции и факты). Мы лишь приведем (очень естественную, но избыточную) систему аксиом евклидовой геометрии трехмерного пространства и отметим некоторые факты, относящиеся к изометриям в нем, опуская все доказательства и не входя в подробности.

0.10.1. Аксиомы евклидовой стереометрии. В рассматриваемой теории есть четыре вида неопределяемых понятий: *точки*, (*прямые*) *линии*, *плоскости* и (*евклидово*) *пространство*. Точки обозначаются заглавными буквами ($A, B, C, \dots, P, Q, \dots$, иногда с нижними или верхними индексами), прямые обозначаются строчным курсивом (l, m, n, \dots , также иногда с нижними или верхними индексами), плоскости — рукописными заглавными буквами ($\mathcal{P}, \mathcal{Q}, \mathcal{R}, \dots$), а пространство обозначается \mathbb{E}^3 . Эти объекты удовлетворяют следующим десяти аксиомам.

I₅. Пространство \mathbb{E}^3 есть множество всех точек.

II₅. Все прямые и все плоскости — непустые подмножества пространства \mathbb{E}^3 .

III₅ Для любых двух точек пространства A, B определено расстояние между ними $d(A, B)$, и оно удовлетворяет тем же условиям (i)–(iv), что и в планиметрии.

IV₅. Каждая плоскость — это евклидова плоскость, т. е. ее точки и прямые удовлетворяют всем аксиомам евклидовой планиметрии; расстояние на всех плоскостях определяется так, как в аксиоме III₅.

Отметим, что определение параллельных прямых из аксиомы планиметрии V нужно изменить: две прямые в пространстве называются *параллельными*, если они либо совпадают, либо лежат в од-

ной плоскости и не имеют общих точек. Две плоскости называются *параллельными*, если они совпадают или не имеют общих точек.

V_S . Для каждой плоскости \mathcal{P} и каждой точки A существует единственная плоскость, содержащая A и параллельная плоскости \mathcal{P} .

В некотором смысле эта аксиома означает, что пространство имеет размерность не выше трех; следующая аксиома утверждает, что его размерность не ниже трех.

VI_S . Для каждой плоскости существует точка $P \in \mathbb{E}^3$, не содержащаяся в ней.

VII_S . Для каждой трех точек существует плоскость, проходящая через них, и если эти точки не лежат на одной прямой, то такая плоскость единственна.

$VIII_S$. Если две различные точки лежат в плоскости, то проходящая через них прямая целиком лежит в этой плоскости.

Легко доказать, используя эти аксиомы, что любые две пересекающиеся прямые задают единственную плоскость, содержащую их. Прямая l называется *перпендикуляром* к плоскости \mathcal{P} , если она имеет общую точку H с \mathcal{P} и перпендикулярна любой прямой, проходящей через H и лежащей в плоскости \mathcal{P} .

IX_S . Для любой плоскости \mathcal{P} и любой точки $A \in \mathbb{E}^3$ существует единственный перпендикуляр к \mathcal{P} , содержащий A .

Две точки A и B лежат по одну сторону от данной плоскости \mathcal{P} , если отрезок $[A, B]$ не пересекает \mathcal{P} , и лежат по разные стороны от \mathcal{P} в противном случае. Таким образом, любая плоскость \mathcal{P} определяет два открытых полупространства: каждое из них состоит из точек по одну сторону от плоскости, а точки разных полупространств лежат по разные стороны от \mathcal{P} . (Замкнутое полупространство определяется как объединение открытого полупространства с граничной плоскостью.) Отражение от плоскости \mathcal{P} — это преобразование, которое переводит любую точку плоскости в себя, а любую точку A , не принадлежащую \mathcal{P} , — в точку A' на той же прямой, перпендикулярной \mathcal{P} , причем середина отрезка AA' принадлежит \mathcal{P} .

X_S . Отражение от любой плоскости является изометрией.

Из определения отражения (и аксиом) непосредственно следует, что любое отражение от плоскости \mathcal{P} меняет местами два полупространства, которые она определяет.

Замечание. На самом деле аксиомы IX_S и X_S можно вывести из других аксиом — в частности, из очень сильной аксиомы IV_S . Мы

включили их для краткости и чтобы подчеркнуть аналогию между двумерной и трехмерной евклидовой геометрией.

0.10.2. Выпуклые многогранники. Подмножество \mathcal{C} пространства \mathbb{E}^3 (или плоскости \mathbb{E}^2) называется *выпуклым*, если из того, что $A, B \in \mathcal{C}$, следует, что $[A, B] \subset \mathcal{C}$. Из определений непосредственно вытекает, что любое открытое полупространство выпукло, так же как и замкнутое (аналогичное верно для полуплоскостей).

Предложение 0.10.3. *Пересечение двух выпуклых множеств выпукло.*

Мы называем *выпуклым многогранником* пересечение конечно-го числа замкнутых полупространств, если это множество ограничено и имеет внутренние точки (т. е. точки, являющиеся центрами шаров, целиком лежащих в нем). Читатель, без сомнения, знаком с такими выпуклыми многогранниками, как *куб*, *параллелепипед*, различные *тетраэдры* и *призмы*, и, возможно, слышал о правильных многогранниках, например об *октаэдре* или *додекаэдре*.

0.10.4. Изометрии пространства. Напомним, что *изометрия* пространства \mathbb{E}^3 — это его преобразование, сохраняющее расстояния. Любая изометрия является биекцией пространства. Можно доказать, что *любая изометрия является композицией отражений*. (Под отражением мы всегда понимаем в данном пункте отражение относительно плоскости.) Перечислим некоторые важные примеры изометрий. Следующее утверждение непосредственно вытекает из определений.

(i) *Параллельные переносы.* Композиция τ двух отражений относительно параллельных плоскостей $\mathcal{P} \parallel \mathcal{Q}$ называется *параллельным переносом*. Как и в двумерном случае, любой параллельный перенос можно задать *свободным вектором*, а именно вектором $2\overline{HK}$, где прямая HK перпендикулярна плоскостям отражений и при этом $H \in \mathcal{P}$, $K \in \mathcal{Q}$.

(ii) *Повороты вокруг оси.* Композиция ρ двух отражений относительно пересекающихся плоскостей $\mathcal{P} \nparallel \mathcal{Q}$ называется *поворотом вокруг оси*, а именно вокруг прямой $l := \mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$. Легко показать, что ограничение поворота ρ на произвольную плоскость \mathcal{R} , перпендикулярную прямой l , является поворотом в этой плоскости вокруг точки $O := \mathcal{R} \cap l$ на удвоенный угол между \mathcal{P} и \mathcal{Q} . (Определение (двугранного) угла между двумя плоскостями предоставляется читателю, как и установление направления поворота.)

Частный случай поворота вокруг оси — *осевая симметрия*, которая является композицией двух отражений относительно перпендикулярных плоскостей и может быть описана следующим образом: чтобы получить образ A' произвольной точки A , проведем перпендикуляр $АН$ из A к оси поворота l , $l \in H$, и продолжим $[A, H]$ до $[A, A']$, где $|АН| = |НА'|$. Осевую симметрию можно также описать как поворот вокруг l на 180° .

(iii) *Центральные симметрии*. Мы называем *центральной симметрией* σ с центром C преобразование, переводящее произвольную точку A в точку A' , симметричную ей относительно C , т. е. в такую точку A' , что C является серединой отрезка $[A, A']$. Можно посмотреть на σ и иначе, определив его как композицию трех отражений относительно трех попарно перпендикулярных плоскостей с общей точкой O .

(iv) *Винтовые движения*. Мы называем *винтовым движением* χ композицию поворота вокруг оси и параллельного переноса в направлении этой оси. Таким образом, можно определить χ как композицию четырех отражений. Винтовое движение моделирует движение шурупа, ввинчивающегося в кусок дерева, и потому часто встречается в механике.

Теорема 0.10.5. *Любая изометрия пространства \mathbb{E}^3 является композицией отражений.*

Доказательство не сложно (но трудоемко) и аналогично доказательству теоремы 0.9.2, т. е. состоит в рассмотрении различных случаев перемещения ортогонального репера при данной изометрии.

0.10.6. Ориентация. Пусть $(e_1, e_2, e_3) = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ — ортонормированный репер, т. е. упорядоченная тройка попарно перпендикулярных единичных векторов с общим началом O . Другой такой репер (e'_1, e'_2, e'_3) имеет *ту же* (соответственно *противоположную*) *ориентацию* по отношению к (e_1, e_2, e_3) , если один переводится в другой композицией четного (соответственно нечетного) числа отражений. Таким образом, (e_1, e_2, e_3) и $(e_1, e_2, -e_3)$ ориентированы противоположно. Легко видеть, что множество всех ортонормированных реперов распадается на два класса эквивалентности в отношении ориентации. Выбор одного из этих классов называется *выбором ориентации*.

В курсах физики (а иногда и математики) понятие «положительно ориентированного» репера: вводится вместе с такими фор-

мулировками, как «правило правой руки» (например, в электродинамике). На самом деле не существует *математического* способа выбрать «каноническую» ориентацию из двух существующих, так что выражение «положительно ориентированный репер» математически бессмысленно (как и выражения «поворот в положительном направлении» или «поворот по часовой стрелке» в планиметрии).

Изометрии пространства E^3 , сохраняющие ориентацию, называются *движениями* или *собственными изометриями*. Любое движение есть композиция четного числа отражений. Изометрии, не сохраняющие ориентацию, называются *несобственными*.

0.10.7. Композиции изометрий. Нетрудно доказать следующие свойства композиций некоторых типов изометрий:

(i) *композиция параллельных переносов есть параллельный перенос;*

(ii) *композиция двух поворотов вокруг пересекающихся осей есть поворот вокруг оси, проходящей через их общую точку;*

(iii) *композиция двух отражений есть параллельный перенос или поворот в зависимости от того, параллельны или нет плоскости отражений;*

(iv) *композиция двух центральных симметрий есть параллельный перенос;*

(v) *композиция двух движений есть движение;*

(vi) *композиция двух несобственных изометрий есть движение.*

В главах 1 и 3 этой книги нас будут интересовать изометрии, связанные с различными конкретными дву- и трехмерными объектами (такими, как квадрат, куб, правильный тетраэдр), и нам потребуются умение вполне конкретно описывать композицию двух данных изометрий (например, эффективно строить ось поворота в случае (ii) из предыдущего списка).

Глава 1

Симметрии простейших фигур и основные определения

В этой главе мы изучим пять простейших геометрий (симметрии равностороннего треугольника, квадрата, куба, окружности и сферы), а также модель геометрии так называемой эллиптической плоскости. За этими примерами последует главное определение нашего курса: геометрия в смысле Клейна есть множество вместе с группой преобразований, действующей на нем. Затем мы введем полезные общие понятия, относящиеся к группам преобразований. Наконец, мы рассмотрим соотношения (которые называются морфизмами или эквивариантными отображениями) между различными геометриями, тем самым определив категорию всех геометрий. В конце главы собраны задачи (относящиеся к простейшим геометриям), которые иллюстрируют введенные здесь понятия.

Но прежде чем приступить к этим темам, кратко напомним некоторые термины из элементарной евклидовой геометрии.

§1.1. Изометрии евклидовой плоскости и пространства

Мы предполагаем, что читатель знаком с основными понятиями и фактами евклидовой планиметрии и стереометрии. Евклидову геометрию можно понимать как аксиоматическую теорию (излагаемую в школе не слишком строго) или как небольшую главу линейной алгебры (описание плоскости \mathbb{R}^2 и пространства \mathbb{R}^3 , снабженных стандартной метрикой). Нам неважно, какую из этих двух точек зрения принял читатель, и цель этого параграфа — лишь зафиксировать некоторые термины, общие для обоих подходов.

Изометрия евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 (или пространства \mathbb{R}^3) есть отображение $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ (соответственно $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$), которое сохраняет расстояние d между точками: $d(f(P); f(Q)) = d(P; Q)$ для любой пары точек P, Q на плоскости (соответственно в пространстве). Существуют два типа изометрий: сохраняющие ориентацию (они называются *движениями* или *собственными изометриями*) и меняющие ориентацию (*несобственными изометриями*).

На плоскости примерами движений служат *параллельные переносы* (заданные фиксированным *вектором переноса*) и *повороты* (заданные парой (C, α) , где C — *центр поворота*, α — *угол поворота*). В пространстве примерами движений также являются *параллельные переносы* и *повороты* (вокруг оси). Поворот в пространстве можно задать парой (l, α) , где l — *ось поворота*, т. е. прямая с указанием одного из двух направлений на ней, α — *угол поворота*. Поворот (l, α) отображает произвольную точку пространства M в точку M' , полученную из M поворотом в плоскости Π , перпендикулярной к l , на угол α против часовой стрелки, если смотреть на плоскость «сверху», т. е. из точки, полученной из $l \cap \Pi$ движением по l в указанном направлении.

Примерами несобственных изометрий на плоскости являются *отражения* (т. е. симметрии относительно прямой). В пространстве примерами несобственных изометрий служат *зеркальные симметрии* (т. е. отражения относительно плоскости) и *центральные симметрии* (т. е. отражения относительно точки).

Все остальные симметрии евклидовой плоскости и пространства являются *композициями* перечисленных выше.

Читателя, у которого понятия из этого параграфа вызывают затруднения, приглашаем обратиться к соответствующим местам гл. 0.

§ 1.2. Симметрии некоторых фигур

1.2.1. Симметрии равностороннего треугольника. Рассмотрим все изометрии равностороннего треугольника ABC , т. е. все его отображения на себя, сохраняющие расстояние. (Для определенности будем считать, что буквы A, B, C обозначают последовательные вершины при обходе против часовой стрелки.) Пусть s_A, s_B и s_C — отражения от биссектрис углов треугольника A, B, C . Обозначим через r_0, r_1, r_2 повороты против часовой стрелки вокруг его центра тяжести на $0, 120, 240$ градусов соответственно. Таким образом, r_1 переводит вершину A в B, B в C, C в A . Все эти шесть преобразований называются *симметриями* треугольника ABC , а состоящее из них множество обозначается $\text{Sym}(\Delta)$. Итак,

$$\text{Sym}(\Delta) = \{r_0, r_1, r_2, s_A, s_B, s_C\}.$$

Других изометрий у Δ нет. Действительно, любая изометрия переводит вершины в вершины, а каждое взаимно однозначное соответствие между вершинами полностью задает изометрию. (Напри-

мер, соответствие $A \rightarrow B$, $B \rightarrow A$, $C \rightarrow C$ задает отражение s_C .) Но существует лишь шесть различных способов обозначить три точки буквами A, B, C , так что у Δ не может быть больше шести изометрий.

В некотором смысле $\text{Sym}(\Delta)$ — то же самое, что семейство всех перестановок трех букв A, B, C ; мы уточним это замечание в следующей главе.

Символом $*$ будем обозначать композицию (или произведение) изометрий, в частности элементов из $\text{Sym}(\Delta)$, а выражения типа $r_1 * s_A$ будем понимать таким образом, что сначала выполняется r_1 , а затем s_A . Ясно, что при композиции двух элементов из $\text{Sym}(\Delta)$ всегда получается элемент из $\text{Sym}(\Delta)$.

Какой из этих элементов является композицией двух данных — легко увидеть, сделав чертеж треугольника ABC и посмотрев, что с ним происходит при последовательном выполнении данных изометрий. Но можно сделать это и без чертежей: достаточно проследить «траекторию» вершин A, B, C . Так, в случае $r_1 * s_A$ поворот r_1 переводит вершину A в B , а затем B переходит в C при симметрии s_A ; аналогично $B \rightarrow C \rightarrow B$ и $C \rightarrow A \rightarrow A$, так что вершины A, B, C переходят в C, B, A в указанном порядке, и потому $r_1 * s_A = s_B$.

Порядок выполнения симметрий существен, поскольку результирующая симметрия может измениться при изменении порядка. Так, в нашем примере $s_A * r_1 = s_C \neq s_B$ (как читатель может проверить непосредственно), и потому $r_1 * s_A \neq s_A * r_1$. Таким образом, композиция элементов из $\text{Sym}(\Delta)$ некоммукативна.

Композиции всех возможных пар симметрий треугольника Δ наглядно показаны в следующей таблице умножения:

*	r_0	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_0	r_0	r_1	r_2	s_A	s_B	s_C
r_1	r_1	r_2	r_0	s_B	s_C	s_A
r_2	r_2	r_0	r_1	s_C	s_A	s_B
s_A	s_A	s_C	s_B	r_0	r_1	r_2
s_B	s_B	s_A	s_C	r_2	r_0	r_1
s_C	s_C	s_A	s_B	r_1	r_2	r_0

Здесь (например) элемент s_B на пересечении пятого столбца и третьей строки равен $s_B = r_1 * s_A$, т. е. композиции элементов r_1 и s_A в указанном порядке (сначала выполняется преобразование r_1 , затем s_A).

Как отмечено выше, композиция *некоммутативна*, это ясно видно из таблицы (она не симметрична относительно главной диагонали).

Операция композиции $*$ на множестве $\text{Sym}(\Delta)$ (заведомо) *ассоциативна*, т. е. $(i * j) * k = i * (j * k)$ для всех $i, j, k \in \text{Sym}(\Delta)$. Множество $\text{Sym}(\Delta)$ содержит *тождественное* преобразование r_0 (также обозначаемое через 1). Любой элемент i из $\text{Sym}(\Delta)$ имеет *обратный* i^{-1} , т. е. такой элемент, что $i * i^{-1} = i^{-1} * i = 1$.

Множество $\text{Sym}(\Delta)$, снабженное операцией композиции $*$, называется *группой симметрий равностороннего треугольника*.

1.2.2. Симметрии квадрата. Рассмотрим все изометрии единичного квадрата $\square = ABCD$, т. е. все отображения квадрата на себя, сохраняющие расстояние.

Обозначим через s_H , s_V и s_{ac} , s_{bd} отражения от горизонтальной и вертикальной средних линий квадрата, а также от диагоналей AC , BD . Далее, обозначим через r_0 , r_1 , r_2 , r_3 повороты вокруг центра квадрата на углы 0 , 90 , 180 , 270 градусов соответственно. Все эти восемь преобразований называются *симметриями* квадрата. Положим

$$\text{Sym}(\square) = \{r_0, r_1, r_2, r_3, s_H, s_V, s_{ac}, s_{bd}\}.$$

Как и в случае равностороннего треугольника, композиция любых двух симметрий квадрата является симметрией квадрата, и можно выписать *таблицу умножения*, показывающую результат всех парных композиций:

$*$	r_0	r_1	r_2	r_3	s_H	s_V	s_{ac}	s_{bd}
r_0	r_0	r_1	r_2	r_3	s_H	s_V	s_{ac}	s_{bd}
r_1	r_1	r_2	r_3	r_0	s_{ac}	s_{bd}	s_V	s_H
r_2	r_2	r_3	r_0	r_1	s_V	s_H	s_{bd}	s_{ac}
r_3	r_3	r_0	r_1	r_2	s_{bd}	s_{ac}	s_H	s_V
s_H	s_H	s_{bd}	s_V	s_{ac}	r_0	r_2	r_3	r_1
s_V	s_V	s_{ac}	s_H	s_{bd}	r_2	r_0	r_1	r_3
s_{ac}	s_{ac}	s_H	s_{bd}	s_V	r_1	r_3	r_0	r_2
s_{bd}	s_{bd}	s_V	s_{ac}	s_H	r_3	r_1	r_2	r_0

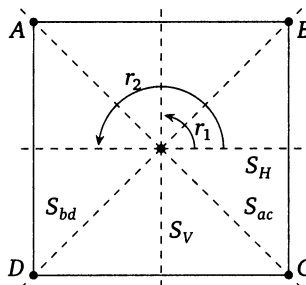


Рис. 1.1. Симметрии квадрата

Здесь (например) элемент s_V на пересечении шестого столбца и четвертой строки равен $s_V = r_2 * s_H$, т. е. композиции преобразований r_2 и s_H в указанном порядке (сначала выполняется преобразование r_2 , затем s_V). Композиция *некоммутативна*.

Очевидно, композиция *ассоциативна*. Множество $\text{Sym}(\square)$ содержит *тождественное* преобразование r_0 (также обозначаемое через id или 1). Любой элемент i из $\text{Sym}(\square)$ имеет *обратный* i^{-1} , т. е. такой элемент, что $i * i^{-1} = i^{-1} * i = 1$.

Множество $\text{Sym}(\square)$, снабженное операцией композиции, называется *группой симметрий квадрата*.

1.2.3. Симметрии куба. Пусть

$$I^3 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1\}$$

— единичный куб. *Симметрия* куба определяется как его изометрическое отображение на себя. Композиция двух симметрий является симметрией. Сколько их?

Сначала подсчитаем собственные изометрии куба (отличные от тождественной), т. е. все его повороты (вокруг оси) на ненулевые углы, которые отображают куб на себя.

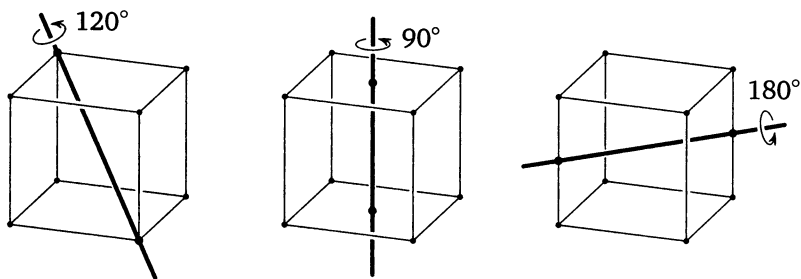


Рис. 1.2. Повороты куба

Есть три оси, соединяющие центры противоположных граней, и углы поворотов вокруг них равны соответственно $\pi/2$, π , $3\pi/2$.

Есть четыре оси, соединяющие противоположные вершины, и углы поворотов вокруг них равны соответственно $2\pi/3$ и $4\pi/3$. Есть шесть осей, соединяющих середины противоположных ребер, и вокруг каждой из них возможен лишь один нетождественный поворот (на угол π). В итоге получаем $(3 \times 3) + (4 \times 2) + (6 \times 1) = 23$ собственные изометрии — или 24, если добавить тождественную.

Других собственных изометрий у куба нет; мы могли бы сейчас доказать этот факт скучным рассуждением, основанным на элементарной геометрии, но отложим доказательство до гл. 3, где результат сразу получится с помощью более общего и эффективного алгебраического метода.

Куб имеет также 24 несобственные изометрии. Их перечислению посвящена задача 1.2 (см. конец главы), для решения которой требуется лишь немного пространственного воображения.

Таким образом, куб имеет 48 изометрий. Все их попарные композиции образуют таблицу умножения размера 48 на 48 — слишком объемистую для книжной страницы.

Множество $\text{Sym}(I^3)$ всех 48 симметрий куба, снабженное операцией композиции, называется *группой симметрий куба*; она ассоциативна, некоммутативна, имеет единицу, а все ее элементы имеют обратные, как и в группах симметрий из предыдущих примеров.

1.2.4. Симметрии окружности. Пусть

$$\bigcirc := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 = 1\}$$

— единичная окружность, а $\text{Sym}(\bigcirc)$ — множество всех ее изометрий. Его элементы бывают двух типов: повороты r_φ вокруг начала координат на углы $\varphi \in [0, 2\pi)$ и отражения s_α , $\alpha \in [0, \pi)$, от прямых, проходящих через начало координат, где α обозначает угол (в направлении против часовой стрелки) между осью абсцисс и данной прямой. Композицию поворотов задает (очевидная) формула

$$r_\varphi * r_\psi = r_{(\varphi+\psi) \bmod 2\pi},$$

где запись $\bmod 2\pi$ означает, что мы вычитаем 2π из суммы $\varphi + \psi$, если последняя больше либо равна 2π .

Композиция отражений s_α и s_β есть поворот на угол $|\alpha - \beta|$,

$$s_\alpha * s_\beta = r_{2(\alpha-\beta)}.$$

Заинтересовавшийся читатель немедленно проверит эту формулу на чертеже, сравнив углы, появляющиеся при композиции двух симметрий.

Множество всех изометрий окружности, снабженное операцией композиции, называется *группой симметрий окружности* и обозначается $\text{Sym}(\bigcirc)$. Группа $\text{Sym}(\bigcirc)$ состоит из бесконечного количества элементов. Как и в предыдущих случаях, она ассоциативна, некоммутативна, содержит единицу, а все ее элементы имеют обратные.

1.2.5. Симметрии сферы. Пусть

$$\mathbb{S}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

— единичная сфера. Обозначим через $\text{Sym}(\mathbb{S}^3)$ множество всех ее изометрий, а через $\text{Rot}(\mathbb{S}^3)$ — множество всех ее поворотов (на различные углы вокруг различных осей, проходящих через центр сферы). Кроме поворотов, группа преобразований $\text{Sym}(\mathbb{S}^3)$ содержит отражения относительно различных плоскостей, проходящих через центр сферы, ее симметрию относительно центра и композиции этих преобразований с поворотами.

Отражения относительно плоскостей, в отличие от поворотов, меняют ориентацию сферы. Это означает, что маленькая окружность на сфере, ориентированная по часовой стрелке (если мы смотрим на сферу извне), при любом отражении преобразуется в окружность, ориентированную против часовой стрелки, а изображение левой руки на сфере становится изображением правой руки. При этом отражение относительно прямой, проходящей через центр сферы, не меняет ориентацию (в противоположность отражениям относительно плоскостей!), поскольку отражение сферы от прямой — то же самое преобразование, что и поворот вокруг этой прямой на 180° . С другой стороны, отражение сферы относительно ее центра меняет ее ориентацию (опять-таки в противоположность отражению плоскости от точки).

Отметим, что композиция двух отражений относительно плоскостей есть поворот (см. задачу 1.10), а композиция двух поворотов — снова поворот (вопрос о том, на какой угол и вокруг какой оси, рассмотрен в задаче 1.11).

Множество всех изометрий сферы, снабженное операцией композиции, называется *группой симметрий сферы* и обозначается $\text{Sym}(\mathbb{S}^3)$. Группа $\text{Sym}(\mathbb{S}^3)$ состоит из бесконечного количества элементов. Как и в предыдущих случаях, она ассоциативна, некоммутативна, содержит единицу, и все ее элементы имеют обратные.

1.2.6. Модель эллиптической планиметрии. Рассмотрим множество $\text{Ant}(\mathbb{S}^2)$ всех пар противоположных точек (т. е. пар точек, симметричных относительно начала координат) на единичной сфере \mathbb{S}^2 ; таким образом, $\text{Ant}(\mathbb{S}^2)$ состоит не из обычных точек, а из *пар точек*. Теперь рассмотрим семейство (обозначим его $O(3)$) всех изометрий пространства \mathbb{R}^3 , оставляющих на месте начало координат¹. Ясно,

¹ В курсах линейной алгебры такие преобразования называются *ортогональными*, а $O(3)$ называется *ортогональной группой*.

что любая такая изометрия переводит пару противоположных точек в пару противоположных точек и потому отображает множество $X = \text{Ant}(\mathbb{S}^2)$ в себя.

Семейство $O(3)$ преобразований множества $\text{Ant}(\mathbb{S}^2)$ называется *группой изометрий эллиптической плоскости Римана*. Этот объект гораздо сложнее, чем предыдущие простейшие геометрии. Мы вернемся к его изучению в гл. 6.

§ 1.3. Группы преобразований

1.3.1. Определения и обозначения. Пусть X — множество (конечное или бесконечное) произвольных элементов, называемых *точками*. По определению *группа преобразований* G , действующая на X , — это (непустое) множество G биекций множества X , снабженное операцией композиции $*$ и удовлетворяющее следующим условиям:

(i) G замкнуто относительно композиции, т. е. для любых преобразований $g, g' \in G$ их композиция $g * g'$ принадлежит G ;

(ii) G замкнуто относительно взятия обратных, т. е. для любого преобразования $g \in G$ обратное к нему g^{-1} принадлежит G .

Из этих условий немедленно следует, что G содержит тождественное преобразование. Действительно, возьмем любое $g \in G$; из условия (ii) следует, что $g^{-1} \in G$; из условия (i) следует, что $g^{-1} * g \in G$; но $g^{-1} * g = \text{id}$ (по определению обратного элемента), и потому $\text{id} \in G$. Отметим также, что композиция в G ассоциативна (поскольку композиция отображений всегда ассоциативна).

Если $x \in X$ и $g \in G$, то xg будет обозначать образ точки x при преобразовании g . (Более обычное обозначение $g(x)$ неудобно, поскольку $x(g * h) = (xg)h$, но $(g * h)(x) = h(g(x))$, т. е. g и h в правой части равенства появляются в обратном порядке.)

1.3.2. Примеры. Все пять простейших геометрий, рассмотренных в предыдущем параграфе, дают примеры групп преобразований. Пять групп преобразований Sym действуют (изометриями) соответственно на равностороннем треугольнике, квадрате, кубе, окружности и сфере. В последнем примере 1.2.5 ортогональная группа $O(3)$ действует на пары противоположных точек сферы, и эти пары рассматриваются как «точки» «эллиптической плоскости».

Дальнейшими примерами служат группы преобразований $\text{Bij}(X)$, состоящие из всех биекций некоторого множества X . По опреде-

лению групп преобразований $\text{Bij}(X)$ — это наибольшая (по включению) группа преобразований, действующая на данном множестве X . Другой крайний случай: любое множество X имеет группу преобразований из одного элемента — тождественного преобразования.

Если множество X конечно и состоит из n объектов, то группа $\text{Bij}(X)$ всех его биекций называется *группой перестановок* n объектов и обозначается Σ_n . Эта группа — одно из самых фундаментальных понятий в математике. Она играет ключевую роль в общей алгебре, линейной алгебре и, как мы увидим уже в следующей главе, в геометрии.

1.3.3. Орбиты, стабилизаторы, формула классов. Пусть $(X : G)$ является некоторой группой преобразований, действующей на множестве X , и пусть $x \in X$. Тогда *орбита* элемента x определяется как

$$\text{Orb}(x) := \{xg \mid g \in G\} \subset X,$$

а *стабилизатор* элемента x — как

$$\text{St}(x) := \{g \in G \mid xg = x\} \subset G.$$

Например, если $X = \mathbb{R}^2$, а G — группа поворотов плоскости вокруг начала координат, то множество орбит состоит из начала координат и всех окружностей с центром в начале координат; стабилизатор начала координат — вся группа G , а стабилизаторы всех остальных точек плоскости тривиальны (т. е. состоят из одного элемента — тождественного преобразования $\text{id} \in G$).

Пусть $(X : G)$ — действие конечной группы преобразований G на конечном множестве X . Тогда количество точек в G равно (очевидно)

$$|G| = |\text{Orb}(x)| \times |\text{St}(x)|, \quad (1.1)$$

где x — произвольный элемент из X . Пусть теперь множество $A \subset X$ пересекает каждую орбиту ровно в одной точке. Тогда количество точек в X можно выразить формулой

$$|X| = \sum_{x \in A} \frac{|G|}{|\text{St}(x)|}, \quad (1.2)$$

которую называют *формулой классов*. Эта формула, как и предыдущая, непосредственно следует из определений.

1.3.4. Фундаментальные области. Пусть X — подмножество в \mathbb{R}^n (например, само \mathbb{R}^n), а G — группа преобразований, действующая на X . Подмножество $F \subset X$ называется *фундаментальной областью* действия группы G на множестве X , если:

- F открыто в X ;
- $F \cap Fg = \emptyset$ для любого $g \in G$, кроме $g = \text{id}$;
- $X = \bigcup_{g \in G} \text{Clos}(Fg)$, где $\text{Clos}(\cdot)$ обозначает замыкание множества.

Например, в случае квадрата фундаментальная область действия группы $\text{Sym}(\square)$ — это внутренность треугольника $АОМ$, где O — центр квадрата, а M — середина стороны AB ; разумеется, $\text{Sym}(\square)$ имеет много других фундаментальных областей. Таким образом, фундаментальные области не обязательно определяются единственным образом. Более того, фундаментальные области не всегда существуют: например, $\text{Sym}(S^1)$ (и другие «непрерывные» геометрии) не имеют фундаментальных областей.

1.3.5. Морфизмы. Согласно категорному подходу к математике, после введения важного класса объектов нужно определить их *морфизмы*, т. е. естественный класс соотношений между ними. Следуя этому принципу, говорят, что отображение групп преобразований $\alpha: G \rightarrow H$ является *гомоморфизмом*, если α сохраняет произведение (результат композиции), т. е.

$$\alpha(g_1 * g_2) = \alpha(g_1) * \alpha(g_2) \quad \text{для всех } g_1, g_2 \in G. \quad (1.3)$$

Рассмотрим несколько примеров гомоморфизмов:

(i) отображение $\mu: \text{Sym}(\square) \rightarrow \text{Sym}(I^3)$ получается, если положить единичный квадрат на верхнюю грань единичного куба и продолжить изометрии квадрата на весь куб естественным образом (например, поворот квадрата на 90° продолжим до поворота куба на 90° вокруг вертикальной оси, проходящей через центры горизонтальных граней куба);

(ii) отображение $\nu: \text{Sym}(\triangle) \rightarrow \text{Sym}(\bigcirc)$ каждому повороту правильного треугольника сопоставляет поворот окружности на тот же угол, а отражениям s_A, s_B, s_C — отражения окружности $s_0, s_{2\pi/3}, s_{4\pi/3}$;

(iii) отображение $\iota: S_3 \rightarrow \text{Sym}(\triangle)$ сопоставляет каждой перестановке символов A, B, C изометрию, переставляющую вершины треугольника A, B, C .

Читателю предоставляется непосредственно проверить, что эти отображения — действительно гомоморфизмы, т. е. выполнено соотношение (1.3).

Гомоморфизм α групп преобразований называется *мономорфизмом*, если отображение α инъективно (т. е. переводит разные элементы в разные). Примерами мономорфизмов служат вышеописанные гомоморфизмы μ и ν . Гомоморфизм групп преобразований α называется *эпиморфизмом*, если он сюръективен (т. е. является отображением на всю группу). Гомоморфизм групп преобразований α называется *изоморфизмом*, если он является и мономорфизмом, и эпиморфизмом, т. е. если отображение α биективно.

Две группы преобразований G и H , действующие на множествах X и Y соответственно (не исключен случай $X = Y$), называются *изоморфными*, если существует изоморфизм $\varphi: G \rightarrow H$. Если две изоморфные группы конечны, то они обязательно содержат равное количество элементов (но количество точек в множествах, на которых они действуют, может различаться, как, например, в случае изоморфных групп $\text{Sym}(\Delta)$ и S_3). Попутно заметим, что $\text{Sym}(\square)$ и S_4 не изоморфны, поскольку первая из этих групп состоит из 8 элементов, а вторая из $4! = 24$.

1.3.6. Порядок группы. *Порядком* группы преобразований G называется количество ее элементов; мы обозначаем его через $|G|$. Таким образом,

$$|\text{Sym}(\Delta)| = 6, \quad |\text{Sym}(\square)| = 8, \quad \text{а } |\text{Sym}(\bigcirc)| = \infty.$$

Порядок элемента g из группы преобразований G по определению равен наименьшему положительному числу k , для которого элемент $g * g * \dots * g$ (k множителей) равен единице; это число обозначается $\text{ord}(g)$. Если такого числа нет, то мы говорим, что g имеет *бесконечный порядок*. Например, в группе $\text{Sym}(\bigcirc)$ поворот на 30° имеет порядок 12, а поворот на $\sqrt{2}\pi$ имеет бесконечный порядок. (Последний факт вытекает из иррациональности числа $\sqrt{2}$.)

1.3.7. Подгруппы. Многие важные классы объектов имеют естественно определенные «подобъекты» (например, таковы пространства и подпространства, многообразия и подмногообразия, алгебры и подалгебры). Группы преобразований — не исключение. Действительно, пусть G — группа преобразований. Ее подмножество H называется *подгруппой* в G , если H также является группой относительно композиции $*$, т. е. удовлетворяет двум условиям:

(i) H замкнуто относительно композиции, т. е.

$$g, g' \in H \Rightarrow g * g' \in H;$$

(ii) H замкнуто относительно взятия обратных, т. е.

$$g \in G \Rightarrow g^{-1} \in G.$$

Согласно этому определению любая группа преобразований G имеет по крайней мере две подгруппы: это сама G и ее одноэлементная подгруппа $\{id\}$, состоящая из единицы (тождественного преобразования). Будем называть эти две подгруппы *тривиальными*, а все остальные *нетривиальными*.

Например, в группе $\text{Sym}(\square)$ множество всех поворотов является (нетривиальной) подгруппой (порядка 4); в группе $\text{Sym}(\bigcirc)$ множество, состоящее из тождественного отображения и отражения s_α является подгруппой порядка 2, множество всех поворотов — подгруппой бесконечного порядка.

Если g — элемент порядка k в группе преобразований G , то множество из k элементов $\{g, g * g, \dots, g * g * \dots * g = id\}$ является подгруппой в G порядка k ; она называется *циклической подгруппой в G , порожденной элементом g* . Эта терминология используется и для элемента g бесконечного порядка, но тогда подгруппа $\{1, g, g^{-1}, g * g, g^{-1} * g^{-1}, g * g * g, \dots\}$ также имеет бесконечный порядок.

§ 1.4. Категория геометрий

В этом параграфе мы введем главное определение этого курса (определение геометрии), а также дадим определения некоторых связанных с ним важных понятий.

1.4.1. Геометрии в смысле Клейна. Пара $(X : G)$, где X — множество, а G — действующая на нем группа преобразований, будет называться *геометрией в смысле Клейна*. Шесть примеров из § 1.2 описывают соответственно геометрию равностороннего треугольника, геометрию квадрата, геометрию куба, геометрию окружности, геометрию сферы и геометрию эллиптической плоскости Римана. Еще один пример — множество $\text{Bij}(X)$ всех биекций произвольного множества X .

1.4.2. Эрлангенская программа. Идею, что геометрии — это множества объектов с действующими на них группами преобразований, впервые высказал в городе Эрлангене немецкий математик Феликс Клейн в 1872 г. в своей знаменитой лекции, ныне известной как «Эрлангенская программа» (русский перевод лекции Клейна см. в [8]).

Нет сомнения, что все геометрии, известные во времена Клейна, обладают свойством, которое он сформулировал в лекции, и это же верно для всех геометрий, созданных после этого. Однако вряд ли можно сказать, что это свойство характеризует геометрии: оно слишком широко. Так, в смысле формального определения из предыдущего пункта геометрией является группа перестановок, так же как любое топологическое пространство, любая абстрактная группа и даже любое множество.

Тем не менее мы будем придерживаться понятия геометрии, введенного в п. 1.4.1, за отсутствием более точного формального определения. Такое определение, если бы оно существовало, потребовало бы наделить $(X : G)$ дополнительной структурой (помимо действия группы G на X), но в настоящее время неясно, какая это должна быть структура. Как можно видеть в таких областях математики, как дифференциальная геометрия в целом, геометрическая топология и дифференциальная топология, у специалистов нет единого мнения, где в их области кончается геометрия и начинается топология.

Может быть, определение из п. 1.4.1 слишком широко, но его достоинство в простоте и в том, что оно позволяет определить очень естественную категорию.

1.4.3. Морфизмы. В соответствии с общим подходом, лежащим в основе категорного языка, морфизм из одной геометрии в другую нужно определить как отображение из множества точек одной геометрии в множество точек другой, согласованное с действием соответствующих групп преобразований. Точнее, если даны две геометрии $(X : G)$ и $(Y : H)$, то морфизм (или эквивариантное отображение) из одной в другую есть пара (α, f) , состоящая из гомоморфизма групп преобразований $\alpha : G \rightarrow H$ и отображения множеств $f : X \rightarrow Y$, таких что

$$f(xg) = (f(x))(\alpha(g)) \quad (1.4)$$

для всех $x \in X$ и всех $g \in G$. Это определение типично для категорного подхода к математике: на первый взгляд формула (1.4) вообще не имеет смысла (не удивительно, что теорию категорий называют «абстрактной чепухой»), но в действительности определение совершенно естественно.

Чтобы увидеть это, возьмем любую точку $x \in X$ и применим к ней произвольное преобразование $g \in G$, переведа ее в точку $xg \in X$. При отображении $f : X \rightarrow Y$ точка x переходит в точку $f(x) \in Y$, а точ-

ка xg — в точку $f(xg) \in Y$. Как связаны эти две точки? Какое преобразование (если такое существует) переводит $f(x)$ в $f(xg)$? Ясно, что если пара отображений (f, α) согласована с действием групп преобразований на X и Y , то этим преобразованием может быть только $\alpha(g)$, и формула (1.4) именно это и утверждает.

Чтобы проверить, что читатель действительно понял это определение, предлагаем доказать, что $\alpha(1) = 1$ для любого морфизма (f, α) .

1.4.4. Изоморфные геометрии. В любой математической теории изоморфными считаются те объекты, которые эквивалентны, т. е. неразличимы в данной теории. Так, в линейной алгебре не различаются изоморфные линейные пространства; множества равной мощности (т. е. такие, между которыми существует биекция) эквивалентны в теории множеств; изоморфные поля неразличимы в общей алгебре, конгруэнтные треугольники — в евклидовой планиметрии, и т. д. Какие геометрии должны считаться эквивалентными? Надеемся, что следующее определение покажется читателю естественным.

Две геометрии $(X : G)$ и $(Y : H)$ называются *изоморфными*, если существуют такая биекция $f : X \rightarrow Y$ и такой изоморфизм $\alpha : G \rightarrow H$, что

$$f(xg) = (f(x))(\alpha(g)) \quad \text{для всех } x \in X \text{ и всех } g \in G.$$

В этом определении формула повторяет соотношение (1.4) и, таким образом, выражает требование, чтобы изоморфизм был морфизмом (удовлетворял условию эквивариантности, т. е. был согласован с действием группы преобразований), а условия на α и f означают, что они являются эквивалентностями, так что определение в целом утверждает, что $(X : G)$ и $(Y : H)$ одинаковы.

Пока что у нас нет содержательных примеров изоморфных геометрий. Дальше они появятся в изобилии. Например, мы увидим (в гл. 10), что полуплоскость Пуанкаре изоморфна модели Кэли—Клейна на круге.

1.4.5. Подгеометрии. Что является подобъектом в категории геометрий? Читатель, который освоил категорный язык, не обнаружит трудности в следующем определении. Геометрия $(G : X)$ называется *подгеометрией* геометрии $(H : Y)$, если X — подмножество множества Y , а G — подгруппа группы H .

С этим определением тесно связано еще одно. *Вложение* (или *инъективный морфизм*) геометрии $(X : G)$ в геометрию $(Y : H)$ — это

такой морфизм (f, α) , что $\alpha: G \rightarrow H$ — мономорфизм, а отображение $f: X \rightarrow Y$ инъективно.

Примеры подгеометрий и вложений геометрий легко получить из примеров подгрупп групп преобразований из п. 1.3.7.

§ 1.5. Некоторые общие замечания

Примеры из § 1.2 (квадрат, куб, окружность) были взяты из элементарной школьной геометрии. Это сделано для мотивировки выбора действия соответствующей группы преобразований. Но теперь вернемся к примеру с кубом и забудем школьную геометрию: вместо куба I^3 с его вершинами, ребрами, гранями, углами, внутренними точками и прочей структурой рассмотрим абстрактное множество точек $\{A, B, C, D, A', B', C', D'\}$ и определим «изометрии куба» как множество из 48 биекций; например, «поворот на 270° » вокруг вертикальной оси — это биекция

$$A \mapsto B, B \mapsto C, C \mapsto D, D \mapsto A, A' \mapsto B', B' \mapsto C', D' \mapsto A',$$

и аналогично определяются остальные 47 «изометрий». Затем (по-прежнему не вспоминая школьную геометрию) можно *определить* вершины, ребра ($[A, B]$ — ребро, а $[A, C']$ — нет), грани и доказать, что все ребра конгруэнтны, все грани конгруэнтны, «куб» может «вращаться» вокруг каждой вершины и т. д. В результате получается *внутренняя геометрия множества вершин* куба.

Эта геометрия — не то же самое, что геометрия куба $(I^3, \text{Sym}(I^3))$, описанная в п. 1.2.3. Разумеется, группа G , действующая в этих двух геометриях, — одна и та же группа порядка 48, но она действует на двух различных множествах: (бесконечном) множестве точек куба I^3 и (конечном) множестве из его восьми вершин $A, B, C, D, A', B', C', D'$. Таким образом, алгебра в обоих случаях одинакова, а геометрия различна. Геометрия пространственного куба I^3 , разумеется, намного богаче, чем геометрия множества его вершин. Например, в пространственном кубе можно рассматривать отрезки прямых, устанавливая их конгруэнтность и т. д.

Отметим также, что геометрические свойства куба I^3 , рассматриваемого как подмножество евклидова пространства \mathbb{R}^3 , богаче, чем его свойства, обусловленные внутренней геометрией $(I^3: \text{Sym}(I^3))$: например, лежащие в нем отрезки одинаковой длины, всегда конгруэнтны в геометрии пространства \mathbb{R}^3 , не обязательно конгруэнтны во внутренней геометрии куба!

Другой пример: множество трех точек $\{A, B, C\}$ с двумя преобразованиями, а именно тождественным преобразованием и «отражением»

$$A \mapsto A, B \mapsto C, C \mapsto B,$$

бесспорно, является геометрией в смысле Клейна. Как ее следует назвать? Читатель, несомненно, согласится, что подходящим названием будет «внутренняя геометрия множества вершин равностороннего треугольника».

§ 1.6. Задачи

1.1. Перечислите все элементы (с указанием их порядка) группы симметрий (т. е. изометрий) равностороннего треугольника. Перечислите все ее подгруппы. Из скольких элементов состоит группа движений (т. е. собственных изометрий) равностороннего треугольника?

1.2. Ответьте на те же вопросы, что в задаче 1.1, для следующих фигур:

- а) правильная четырехугольная пирамида;
- б) правильный тетраэдр; в) куб; г)* додекаэдр¹;
- д)* икосаэдр;
- е) правильный n -угольник (т. е. правильный многоугольник с n сторонами); отдельно рассмотрите случаи четного и нечетного n .

1.3. Вложите геометрию группы движений квадрата в геометрию группы движений куба, а геометрию окружности — в геометрию сферы.

1.4. При каких n и m геометрию правильного n -угольника можно вложить в геометрию правильного m -угольника?

1.5. Пусть G — группа симметрий правильного тетраэдра. Найдите все ее подгруппы порядка 2 и опишите их действие геометрически.

1.6. Пусть G^+ — группа движений куба. Укажите четыре подмножества куба, на которых G^+ действует всеми возможными перестановками.

1.7. Найдите минимальную систему образующих группы симметрий (т. е. минимальное множество симметрий, композициями которых являются все остальные симметрии):

- а) правильного тетраэдра; б) куба.

¹ Здесь и далее звездочка у номера задачи указывает, что задачу следует воспринимать как трудную.

1.8. Опишите фундаментальные области группы симметрий:

а) куба; б) икосаэдра; в) правильного тетраэдра.

1.9. Опишите лист Мёбиуса как подмножество проективной плоскости (см. главу 12).

1.10. Покажите, что композиция двух отражений сферы от плоскостей, проходящих через ее центр, является поворотом. Найдите ось этого поворота и, если дан угол между плоскостями, угол поворота.

1.11. Даны два поворота сферы. Опишите их композицию.

Глава 2

Абстрактные группы; задание групп определяющими соотношениями

Чтобы изучать более сложные геометрии, чем геометрии простейших фигур из предыдущей главы, нужно знать гораздо больше из теории групп. Поэтому сейчас мы приведем необходимые факты из этой теории (в дальнейшем они используются постоянно).

Теория групп преобразований восходит к работам нескольких великих математиков, таких как Лагранж, Абель, Галуа, Софус Ли, Клейн, Артур Кэли, Эли Картан, Герман Вейль. В начале XX столетия алгебраисты решили обобщить эту теорию, создав формальную теорию *абстрактных групп*. В этой главе мы ознакомимся с этой формальной теорией и узнаем, что на самом деле это не обобщение: теорема Кэли (которая завершает эту главу) утверждает, что все абстрактные группы — на самом деле группы преобразований. Мы также узнаем, что два важных класса групп (*свободные группы* и *группы перестановок*) имеют определенные свойства универсальности. Наконец, мы научимся *представлять группы* с помощью образующих и соотношений, что упростит вычисления в группах.

§ 2.1. Абстрактные группы

2.1.1. Группы: что это такое и как с ними обращаться. По определению (абстрактная) *группа* есть множество произвольных элементов G с бинарной операцией $*$ (которая обычно называется *умножением*), подчиненной следующим правилам:

- (*аксиома единицы или нейтрального элемента*) существует единственный элемент $e \in G$ с тем свойством, что $g * e = e * g = g$ для любого $g \in G$;
- (*аксиома обратного элемента*) для любого $g \in G$ существует единственный элемент $g^{-1} \in G$, который называется *обратным* к g и удовлетворяет условиям $g * g^{-1} = g^{-1} * g = e$;
- (*аксиома ассоциативности*) $(g * h) * k = g * (h * k)$ для всех $g, h, k \in G$.

Группа $(G, *)$ называется *коммутативной* или *абелевой*, если $g * h = h * g$ для всех $g, h \in G$ (в этом случае операция обычно называется *сложением* и обозначается знаком $+$, а обратный (противоположный) элемент обозначается $-g$, а не g^{-1}).

Отметим, что элементы абстрактной группы могут быть объектами любой природы, это не обязательно какие-либо биекции, а операция $*$ — не обязательно композиция. Точно так же обозначение обратного элемента g^{-1} чисто формально, оно не означает, что g^{-1} — отображение, обратное к биекции.

Три аксиомы группы, перечисленные выше, значительно более сильны, чем необходимо. Например, условие единственности в аксиоме обратного элемента можно опустить, не изменив класс объектов, удовлетворяющих этим аксиомам. Определение группы можно и еще более ослабить, но с точки зрения геометрии это неважно, так что мы на этом больше не задерживаемся.

Из аксиом группы вытекают некоторые следствия, полезные при вычислениях с элементами групп. В дальнейшем в этих вычислениях мы опускаем символ групповой операции, т. е. пишем gh вместо $g * h$.

Первое непосредственное следствие аксиом группы — *левое и правое правила сокращения*, согласно которым можно сокращать выражения, которые входят в два произведения и стоят в обоих случаях слева или в обоих случаях справа, т. е.

$$\forall g, h, k \in G \quad gh = gk \Leftrightarrow h = k, \quad hg = kg \Leftrightarrow h = k.$$

В этих формулах верна импликация в обе стороны; читая их справа налево, получаем, что можно умножать обе части равенства на один и тот же элемент *с одной и той же стороны*. Разумеется, набранное курсивом важно, поскольку в неабелевых группах сокращение равных величин, стоящих на разных местах при умножении, может привести к ложному результату.

Другое простое, но важное следствие аксиом, — *правила решения линейных уравнений*:

$$\forall g, h, x \in G \quad gx = h \Leftrightarrow x = g^{-1}h, \quad xg = h \Leftrightarrow x = hg^{-1},$$

которые доказываются умножением обеих частей на элемент g^{-1} (он существует по аксиоме обратного элемента) соответственно слева и справа с использованием ассоциативности и аксиомы единичности.

Эти два правила постоянно применяются при работе с уравнениями в группах, как увидит читатель, решая некоторые задачи в конце этой главы.

2.1.2. Примеры групп. Легко видеть, что любая группа преобразований — это группа. В самом деле, вышеперечисленные аксиомы абстрактных групп хотя и не появляются явно в определении групп преобразований, но выполняются для них автоматически: их элементы не произвольны — это биекции, операция умножения в них тоже не произвольна — это композиция, а в этом случае аксиомы ассоциативности и единицы заведомо выполнены.

Приведем еще некоторые важные примеры групп.

(i) *Стандартные числовые группы:* целые числа по сложению $(\mathbb{Z}, +)$, а также рациональные, вещественные и комплексные числа по сложению $(\mathbb{Q}, +)$, $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{C}, +)$; не равные нулю рациональные, вещественные и комплексные числа по умножению $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}, \times)$ и $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \times)$. Отметим, что не равные нулю целые числа не образуют группу по умножению (нет обратных элементов!), так же как натуральные числа \mathbb{N} не образуют группу по сложению (по той же причине). Еще одна приятно устроенная числовая группа состоит из комплексных чисел, по модулю равных единице. Эту группу с операцией — умножением мы будем обозначать через $S^1 := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

(ii) *Группа вычетов по модулю m* , (Z_m, \oplus) (известная также как *циклическая группа из m элементов*); ее элементы — m бесконечных множеств целых чисел с одинаковым остатком от деления на натуральное число m ; эти множества мы обозначим $\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}$; их сумма \oplus обозначается

$$\overline{i} \oplus \overline{j} := \overline{(i+j) \bmod m},$$

где $(\cdot) \bmod m$ обозначает остаток при делении на m . Операция сложения \oplus определена корректно, т. е. не зависит от выбора представителей i и j в классах \overline{i} и \overline{j} . В самом деле, если взять $i + rm$ вместо i и $j + sm$ вместо j , то

$$\overline{(i+rm) + (j+sm)} = \overline{(i+j + (r+s)m)} = \overline{(i+j)}.$$

(iii) *Группа перестановок n объектов S_n* : ее элементы — биекции множества из n элементов, обозначенных натуральными числами $\{1, 2, \dots, n\}$; будем записывать биекции $s \in S_n$ в виде

$$s = [i_1, i_2, \dots, i_n], \quad \text{где } i_1 = s(1), i_2 = s(2), \dots, i_n = s(n);$$

умножение в группе S_n — композиция биекций. Эта группа исключительно важна не только в геометрии, но и в линейной алгебре, комбинаторике, теории представлений, математической физике и т. д. Мы еще вернемся к группам перестановок в этой главе.

(iv) *Свободная группа* $\mathbb{F}_n = \mathbb{F}(a_1, \dots, a_n)$ с n образующими; ее элементы — классы эквивалентности слов, а групповая операция — конкатенация (приписывание одного слова к другому); подробное определение группы \mathbb{F}_n будет дано ниже в п. 2.6.1.

(v) *Группа $GL(n)$ невырожденных линейных операторов на пространстве \mathbb{R}^n* ; ее элементами являются $(n \times n)$ -матрицы с ненулевым определителем, а групповая операция — умножение матриц (или, что то же самое, композиция операторов).

(vi) *Группы ортогональных и специальных ортогональных операторов на пространстве \mathbb{R}^n* , обычно обозначаемые $O(n)$ и $SO(n)$. Мы предполагаем, что читатель знаком с группами $GL(n)$, $O(n)$ и $SO(n)$, по крайней мере для $n = 2$ и $n = 3$; в противном случае следует обратиться к вводу к курсу линейной алгебры.

2.1.3. Порядок группы и ее элементов, образующие. Понятия порядка (элементов группы и самой группы), а также образующих определяются для абстрактных групп точно так же, как для групп преобразований (см. §1.3). В этой книге $|G|$ обозначает порядок группы G (т. е. количество ее элементов), а $\text{ord}(g)$ обозначает порядок элемента $g \in G$, т. е. наименьшее целое положительное число k , для которого $g^k = e$. Примеры: $|\mathbb{Z}_5| = 5$; $|\text{Sym}(\bigcirc)| = \infty$; элемент $\bar{3} \in \mathbb{Z}_{15}$ имеет порядок $\text{ord}(\bar{3}) = 5$; для любого вещественного числа x , не равного нулю, в аддитивной группе \mathbb{R} имеем $\text{ord}(x) = \infty$.

Семейство образующих группы G — это (конечное или бесконечное) множество ее элементов g_1, g_2, \dots , через которые можно выразить любой элемент g из G , т. е. записать его в виде $g = g_1^{\varepsilon_1} \dots g_k^{\varepsilon_k}$, где ε_i равно ± 1 и $g_i^{\pm 1}$ равно g_i . Например, любой ненулевой элемент из \mathbb{Z}_p , где p простое, составляет (одноэлементное) семейство образующих для \mathbb{Z}_p , а $\text{Sym}(\bigcirc)$ не имеет конечного множества образующих. Если g — элемент порядка m в группе G , то множество $\{g, g^2, \dots, g^{m-1}, g^m = e\}$ также является группой (это «подгруппа» в G , см. определения в п. 2.3.1), а ее порядок равен m . Это оправдывает определение одного и того же термина «порядок» для групп и их элементов, хотя на первый взгляд эти понятия представляются весьма различными.

§ 2.2. Морфизмы групп

В соответствии с категорным подходом, как только мы определили интересный класс объектов, в данном случае групп, нужно определить их морфизмы.

2.2.1. Определения. Пусть $(G, *)$ и (H, \star) — две группы; отображение $\varphi: G \rightarrow H$ называется *гомоморфизмом* (или *морфизмом групп*), если оно согласовано с операциями, т. е.

$$\varphi(g_1 * g_2) = \varphi(g_1) \star \varphi(g_2).$$

Таким образом, вложение $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}, n \mapsto n$, является морфизмом, а вложение $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \times) \rightarrow (\mathbb{Q}, +)$ не является (оно не согласовано с операциями, например $2 \times 3 \neq 2 + 3$).

По определению гомоморфизм φ является *мономорфизмом* (соответственно *эпиморфизмом* или *изоморфизмом*), если отображение φ инъективно (соответственно сюръективно или биективно). С точки зрения общей алгебры изоморфные группы идентичны.

2.2.2. Примеры. Группа $\text{Sym}(\Delta)$ изометрий равностороннего треугольника изоморфна группе перестановок S_3 , группа $\text{Sym}(\bigcirc)$ изоморфна $O(2)$; существуют очевидные мономорфизмы группы поворотов $\text{Rot}(\square)$ в $SO(2)$ и группы \mathbb{Z}_3 в \mathbb{Z}_{15} ; имеется не менее очевидный эпиморфизм группы \mathbb{Z} на \mathbb{Z}_{17} .

§ 2.3. Подгруппы

Содержательные математические объекты должны быть не только связаны морфизмами, но и иметь естественно определенные подобъекты.

2.3.1. Определения и примеры. Подгруппа H группы G — это ее подмножество, удовлетворяющее аксиомам группы. Отметим, что при проверке того, что H — подгруппа в G , нет необходимости проверять все аксиомы группы: достаточно убедиться, что множество H замкнуто относительно умножения и взятия обратных. Любая неоднoэлементная группа G включает хотя бы две подгруппы: однoэлементную подгруппу, состоящую из единицы $e \in G$, и саму группу G . Иногда эти две подгруппы называют *тривиальными*, и при изучении строения групп, разумеется, представляют интерес *нетривиальные* подгруппы.

Примеры: $\text{Rot}(\bigcirc)$ — подгруппа в группе $\text{Sym}(\bigcirc)$, множество $\{[1234], [2134]\}$ — подгруппа в S_n , множество $\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ — подгруппа в \mathbb{Z}_{15} , а $\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{11}\}$ — не подгруппа.

2.3.2. Разбиение группы на смежные классы. Пусть H — подгруппа в G . (Левым) смежным классом $gH \subset G$, где $g \in G$, называется множество всех элементов вида gh , $h \in H$. Аналогично определяются правые смежные классы Hg . Правые, так же как и левые, смежные классы образуют разбиение множества всех элементов группы, т. е. два смежных класса либо не пересекаются, либо совпадают.

Чтобы убедиться в этом, достаточно показать, что если два смежных класса имеют общий элемент $\bar{g} \in g_1H \cap g_2H$, то любой элемент из g_1H принадлежит g_2H и обратно. Пусть $\bar{g} \in g_1H$ (т. е. $\bar{g} = g_1\tilde{h}$ для некоторого $\tilde{h} \in H$); надо показать, что $\bar{g} \in g_2H$, т. е. надо найти такое $h_x \in H$, что $\bar{g} = g_2h_x$.

Поскольку $\bar{g} \in g_1H \cap g_2H$, существуют $\bar{h}_1, \bar{h}_2 \in H$, для которых $g_1\bar{h}_1 = \bar{g} = g_2\bar{h}_2$, откуда $g_1 = g_2\bar{h}_2(\bar{h}_1)^{-1}$. Теперь можно записать

$$\bar{g} = g_1\tilde{h} = g_2\bar{h}_2(\bar{h}_1)^{-1}\tilde{h} = g_2(\bar{h}_2(\bar{h}_1)^{-1}\tilde{h}) = g_2h_x,$$

где h_x — это $\bar{h}_2(\bar{h}_1)^{-1}\tilde{h}$, а поскольку h_x принадлежит H (как произведение элементов из H), мы доказали, что $\bar{g} \in g_1H \implies \bar{g} \in g_2H$. Обратная импликация доказывается симметрично (поменяем местами индексы 1 и 2).

Таким образом, мы разбили G на левые смежные классы. Разбиение на правые смежные классы получается аналогично.

Отметим, что все смежные классы содержат одинаковое количество элементов (конечное или бесконечное), поскольку существует очевидная биекция между любым смежным классом и подгруппой H . Для левых смежных классов эта биекция имеет вид $gH \ni gh \mapsto h \in H$.

§ 2.4. Теорема Лагранжа

Следствие из элементарной теоремы, доказанное ниже, — это первая структурная теорема об абстрактных группах. Она была доказана (для групп преобразований) два века назад Лагранжем.

Теорема 2.4.1. Если H — подгруппа конечной группы G , то порядок группы H делит порядок группы G .

Доказательство. Смежные классы по подгруппе H группы G образуют разбиение множества элементов группы G (см. п. 2.3.2), и каждый из них содержит такое же количество элементов, как H . \square

Следствие 2.4.2. Любая группа G простого порядка p изоморфна группе \mathbb{Z}_p .

Доказательство. Пусть $g \in G$, $g \neq e$, а m — наименьшее натуральное число, для которого $g^m = e$. Тогда легко видеть, что $H := \{e, g, g^2, \dots, g^{m-1}\}$ — подгруппа в G . Из теоремы 2.4.1 следует, что m делит p . Это возможно лишь при $m = p$, но тогда группы $H = G$ и \mathbb{Z}_p , очевидно, изоморфны. \square

§ 2.5. Факторгруппы

Хорошо устроенные математические объекты часто имеют естественно определенные «факторобъекты», которые получаются «делением» данного объекта на некоторый подобъект (наверно, читателю знаком такой пример, как факторпространства в линейной алгебре). Построение «факторгрупп» таким путем возможно, лишь если используемая подгруппа в каком-то смысле «хорошо устроена», и мы начнем с определения таких подгрупп.

2.5.1. Нормальные подгруппы. Подгруппа $H \subset G$ называется *нормальной*, если $gHg^{-1} = H$ для любого $g \in G$, т. е. при любом $h \in H$ и любом $g \in G$ выполнено включение $g^{-1}hg \in H$.

Примером нормальной подгруппы служит множество $\{\bar{0}, \bar{5}, \bar{10}\}$ в \mathbb{Z}_{15} . Более общим образом, любая подгруппа абелевой группы заведомо нормальна.

В качестве примера подгруппы, которая не нормальна, рассмотрим подмножество $D := \{e = [1, 2, 3, 4], [2, 1, 3, 4]\}$ в группе перестановок S_4 . Множество D , очевидно, является подгруппой (изоморфной \mathbb{Z}_2) в группе S_4 , но эта подгруппа не нормальна, поскольку

$$[4, 1, 2, 3] [2, 1, 3, 4] [2, 3, 4, 1] = [1, 3, 2, 4] \notin D.$$

2.5.2. Построение факторгрупп. Если H — нормальная подгруппа в G , то существует корректно определенная операция на множестве смежных классов по ней: произведение двух смежных классов есть смежный класс, содержащий произведения любых двух элементов этих смежных классов. Для левых смежных классов это можно записать в виде $g_1H g_2H := g_1g_2H$.

Чтобы доказать корректность введенной операции, нужно показать, что если заменить g_1 на другой элемент \bar{g}_1 из Hg_1 , а g_2 заменить на другой элемент \bar{g}_2 из Hg_2 , то $\bar{g}_1H\bar{g}_2H = g_1Hg_2H$. Без потери общности достаточно рассмотреть замену лишь одного элемента,

например g_1 . Тогда $\bar{g}_1 = g_1 \bar{h}_1$ для некоторого $\bar{h}_1 \in H$. Нужно доказать, что $\bar{g}_1 g_2 \in g_1 g_2 H$, т. е. что существует h_x , для которого $\bar{g}_1 g_2 = g_1 g_2 h_x$. Заменяя \bar{g}_1 его выражением $g_1 \bar{h}_1$ (см. выше), приведем предыдущее равенство к виду

$$g_1 \bar{h}_1 g_2 = g_1 g_2 h_x.$$

Разрешив это (линейное) уравнение относительно h_x , получаем $h_x = g_2^{-1} \bar{h}_1 g_2$. Напомним, что подгруппа H нормальна, поэтому правая часть предыдущего равенства принадлежит H . Таким образом, мы нашли нужный элемент $h_x \in H$, тем самым доказав, что произведение смежных классов определено корректно.

Семейство всех смежных классов с такой операцией умножения называется *факторгруппой* группы G по H и обозначается G/H . Легко показать, что G/H удовлетворяет аксиомам групп.

Пример: в аддитивной группе целых чисел $(\mathbb{Z}, +)$ элементы вида $5k$, $k \in \mathbb{Z}$, составляют нормальную подгруппу (бесконечного порядка), обозначаемую $5\mathbb{Z}$; соответствующая факторгруппа $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ изоморфна группе \mathbb{Z}_5 .

§ 2.6. Свободные группы и группы перестановок

В этом параграфе мы рассмотрим два класса групп: свободные группы (группы «с минимумом структуры») и группы перестановок (группы «с максимумом структуры»).

2.6.1. Свободные группы. Пусть $\{a_1, \dots, a_k\}$ — некоторое множество символов. Тогда множество формальных символов (называемых *буквами*)

$$A := \{e, a_1, \dots, a_k, a_1^{-1}, \dots, a_k^{-1}\}$$

будет нашим *алфавитом*. Строка букв из нашего алфавита будет называться *словом*. Два слова w_1 и w_2 называются *эквивалентными*, если можно получить одно из другого применением следующих *тривиальных соотношений*: $a_i a_i^{-1} = a_i^{-1} a_i = e$ для любого i и $ae = ea = a$ для любого $a \in A$; например,

$$a_1 a_3^{-1} \sim a_1 a_3^{-1} e \sim a_1 a_3^{-1} a_2 a_2^{-1} \sim a_1 a_3^{-1} a_2 e a_2^{-1}.$$

Произведение двух слов определяется как их конкатенация (т. е. результат приписывания одного к другому). *Свободная группа* с образующими a_1, \dots, a_k определяется как множество всех классов эквивалентности слов с операцией умножения (конкатенации) и обо-

значается $\mathbb{F}_k = \mathbb{F}[a_1, \dots, a_k]$. Опустим непосредственную проверку того, что конкатенация корректно определена на классах эквивалентности (т. е. замена элементов на эквивалентные приводит к замене результата конкатенации на эквивалентный).

В частности, свободная группа $\mathbb{F}[a]$ изоморфна $(\mathbb{Z}, +)$, тогда как группа $\mathbb{F}[a_1, a_2]$ некоммутативна.

2.6.2. Группы перестановок. *Группа перестановок S_n на n объектах была определена в п. 2.1.2 как семейство всех биекций множества $\{1, 2, \dots, n\}$ с операцией композиции; S_n состоит из $n! = 1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot n$ элементов, обозначаемых $[i_1, \dots, i_n]$, где $i_k := \beta(k)$, а β обозначает биекцию, соответствующую данной перестановке.*

Группу перестановок S_3 можно геометрически интерпретировать как группу изометрий $\text{Sym}(\Delta)$ равностороннего треугольника, а S_4 изоморфна группе изометрий правильного тетраэдра (как мы увидим в следующей главе).

2.6.3. Теорема универсальности. Оказывается, группы перестановок и свободные группы имеют важные свойства «универсальности».

Теорема 2.6.4. (i) *Для любой конечной группы G существует ее мономорфизм в S_n при некотором n .*

(ii) *Для любой группы G с конечным количеством n образующих существует эпиморфизм свободной группы \mathbb{F}_n на G .*

Доказательство. (i) Пусть $|G| = n$ и $g_0 \in G$; тогда отображение

$$\beta_{g_0}: G \rightarrow S_n \quad \text{вида} \quad \beta_{g_0}: g \mapsto gg_0$$

является мономорфизмом. Действительно, это заведомо гомоморфизм (равенство $\beta_{g_0}\beta_{g_1} = \beta_{g_0g_1}$ выполнено, поскольку оба отображения заданы правилом $g \mapsto gg_0g_1$). Гомоморфизм β_{g_0} инъективен, так как из равенства $g_0g = g_0g'$ следует, что $g = g'$, по правилу сокращения.

(ii) Пусть g_1, \dots, g_n — множество образующих группы G . Тогда отображение

$$\alpha: \mathbb{F}[a_1, \dots, a_n] \rightarrow G \quad \text{вида} \quad \alpha(a_i) = g_i, \quad i = 1, \dots, n$$

заведомо является гомоморфизмом. Оно сюръективно, поскольку каждый элемент $g_{i_1}^{\varepsilon_1} g_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots g_{i_m}^{\varepsilon_m} \in G$, где все ε_i равны ± 1 , получается при отображении α из элемента $a_{i_1}^{\varepsilon_1} a_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots a_{i_m}^{\varepsilon_m} \in \mathbb{F}[a_1, \dots, a_n]$. \square

§ 2.7. Задание групп определяющими соотношениями

Речь пойдет о задании группы посредством уравнений (которые называются *определяющими соотношениями*) между образующими группы. Это сводит конкретные вычисления в группе к формальному преобразованию слов по простым правилам. Формальное определение нетрудно сформулировать, но не столь просто воспринять, поэтому начнем с примеров.

2.7.1. Примеры задания групп определяющими соотношениями. (i) Рассмотрим все слова в трехбуквенном алфавите $\{e, a, a^{-1}\}$, т. е. выражения вида $ea a^{-1} a a e$, $a^{-1} a e a a a$ и т. п. Будем говорить, что два слова *эквивалентны*, если можно преобразовать одно слово в другое посредством *тривиальных соотношений* $aa^{-1} = e = a^{-1}a$ и $ae = ea = a$ и равенства $a^5 = 1$ (как обычно, a^5 означает $aaaaa$). Ясно, что это отношение удовлетворяет определению эквивалентности, т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно, так что множество всех слов распадается на классы эквивалентности. Определим произведение двух классов эквивалентности как класс, содержащий конкатенации любых двух элементов из данных классов. Легко видеть, что такое произведение корректно определено, т. е. не зависит от выбора представителей в классах. Очевидно, получится пять классов эквивалентности (заданных элементами $a, a^2, a^3, a^4, a^5 = e$), и они образуют группу относительно определенной выше операции умножения. Ясно, что полученная группа изоморфна \mathbb{Z}_5 .

(ii) Теперь рассмотрим слова в пятибуквенном алфавите $\{e, s_1^{\pm 1}, s_2^{\pm 1}\}$. Будем говорить, что два слова *эквивалентны*, если одно преобразуется в другое посредством *тривиальных соотношений* (которые мы снова не будем выписывать) и равенств $s_1^2 = s_2^2 = e$ и $s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2$ (последнее известно как *тождество Артина*). Определив произведение соответствующих классов эквивалентности, как в предыдущем примере, получаем группу, изоморфную S_3 (см. ниже задачу 2.9).

2.7.2. Формальное определение. Задание группы определяющими соотношениями формально определяется следующим образом. Рассмотрим выражение вида

$$G = \langle g_1, \dots, g_n : R_1, \dots, R_k \rangle,$$

где R_1, \dots, R_k — слова в алфавите $A = \{g_1, \dots, g_n, g_1^{-1}, \dots, g_n^{-1}\}$; слова R_j называются *определяющими соотношениями*; группа G определяет

ся своим представлением в виде факторгруппы

$$\mathbb{F}[g_1, \dots, g_n] / \{R_1, \dots, R_k\},$$

где $\{R_1, \dots, R_k\}$ — наименьшая (по включению) нормальная подгруппа свободной группы $\mathbb{F}[g_1, \dots, g_n]$, содержащая элементы (определяющие соотношения) R_1, \dots, R_k .

Может быть, это формальное определение непросто для понимания, но суть его проста. Элементы группы G , о которой идет речь, — это слова в алфавите A , определенные с точностью до тривиальных соотношений (см. выше п. 2.6.1) и до всех *определяющих соотношений* $R_1 = e, \dots, R_k = e$; произведение равно конкатенации (и определено корректно).

Вот некоторые примеры:

- (i) группа $\mathbb{Z}_m = \langle a : a^m \rangle$ — это циклическая группа из m элементов;
- (ii) группа $\mathbb{F}[g_1, \dots, g_n] = \langle g_1, \dots, g_n : \rangle$ — это свободная группа с n образующими (в угловых скобках после двоеточия ничего нет, поскольку в свободной группе нет определяющих соотношений);
- (iii) группу перестановок четырех элементов можно задать соотношениями

$$S_4 = \langle s_1, s_2, s_3 : s_1^2, s_2^2, s_3^2, s_1 s_3 s_1^{-1} s_3^{-1}, s_1 s_2 s_1 s_2^{-1} s_1^{-1} s_2^{-1}, s_2 s_3 s_2 s_3^{-1} s_2^{-1} s_3^{-1} \rangle.$$

Дальнейшие подробности и примеры приведены среди задач к этой главе.

§ 2.8. Теорема Кэли

Следующая теорема (принадлежащая британскому математику Артуру Кэли) показывает, что понятие абстрактной группы на самом деле не является обобщением: все группы — в действительности группы преобразований!

Теорема 2.8.1. *Любая группа G является группой преобразований именно G действует на множестве элементов G правыми умножениями: $g \mapsto gg_0$ для любого $g_0 \in G$.*

Доказательство. Во-первых, нужно показать, что соответствие $g \mapsto gg_0$ является биекцией при любом $g_0 \in G$. Но это очевидно: соответствие инъективно (согласно правилу сокращения) и сюръективно (при действии элемента g_0 любой элемент $h \in G$ получается из элемента hg_0^{-1}). Далее, нужно проверить аксиомы групп преобразований (см. п. 1.3.1). Эта проверка также очевидна: совокупность преобразований, заданных элементами из G , замкнута относительно композиции (поскольку это верно для элементов из G) и отно-

сительно взятия обратных (преобразование, обратное к заданному элементом g_0 , задано элементом g_0^{-1}). \square

Следствие 2.8.2. *Любая группа является геометрией в смысле Клейна (т. е. в смысле формального определения из п. 1.4.1).*

Это следствие показывает (как мы ранее отметили), что определение геометрии из п. 1.4.1 в действительности слишком широко; чтобы получить объект, который будет *настоящей* геометрией по мнению большинства математиков, и нужны дополнительные ограничения на множество элементов и группу преобразований. Однако по этому вопросу не видно формального согласия среди математиков, так что необходимые «дополнительные ограничения» — дело вкуса, и в этом курсе мы их не конкретизируем (по крайней мере на формальном уровне).

§ 2.9. Задачи

2.1. Опишите все конечные группы порядка не выше 6 и дайте каждой из них геометрическую интерпретацию.

2.2. Опишите все (нетривиальные) нормальные подгруппы и соответствующие факторгруппы:

- а) группы изометрий равностороннего треугольника;
- б) группы изометрий правильного тетраэдра.

2.3. Пусть G — группа движений плоскости, P — подгруппа параллельных переносов, R — подгруппа поворотов с фиксированным центром O . Докажите, что подгруппа P нормальна, а факторгруппа G/P изоморфна группе R .

2.4. Докажите, что если порядок подгруппы равен половине порядка группы (т. е. подгруппа имеет индекс 2), то подгруппа нормальна.

2.5. Найдите все орбиты и стабилизаторы всех точек в группе $G \subset S_{10}$, которая порождена перестановкой $[5, 8, 3, 9, 4, 10, 6, 2, 1, 7] \in S_{10}$, действующей на множестве $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$.

2.6. Найдите максимальный порядок элементов в группе: а) S_5 ; б) S_{13} .

2.7. Найдите наименьшее натуральное число n , при котором группа S_{13} не содержит элементов порядка n .

2.8. Докажите, что группа перестановок S_n порождена транспозицией $(1\ 2) := [2, 1, 3, 4, \dots, n]$ и циклом $(1\ 2 \dots n) := [2, 3, \dots, n, 1]$.

2.9. Найдите два способа задать группу симметрий равностороннего треугольника образующими и соотношениями.

2.10. Сколько существует гомоморфизмов свободной группы с двумя образующими в группу перестановок S_3 ? Сколько из них являются эпиморфизмами?

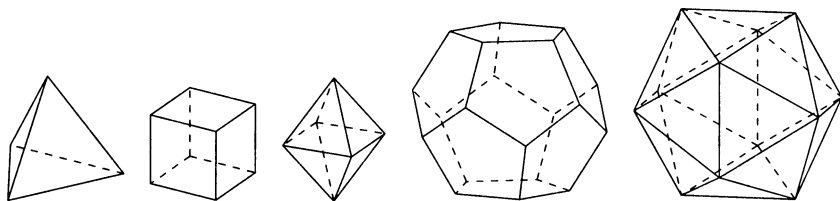
2.11. Докажите, что группа, заданная в виде $\langle a, b: a^2 = b^n = a^{-1}bab = 1 \rangle$, изоморфна группе диэдра \mathbb{D}_n (которая определяется в гл. 3).

2.12. Покажите, что если в некоторой группе элементы a и b удовлетворяют соотношениям $a^5 = b^3 = 1$ и $b^{-1}ab = a^2$, то $a = 1$.

Глава 3

Конечные подгруппы в группе $SO(3)$ и платоновы тела

Эта глава посвящена классификации правильных многогранников (пяти так называемых «платоновых тел»), изображенных ниже:



Доказательство классификационной теоремы, приведенное здесь, опирается на теорию групп, точнее на рассмотрение конечных подгрупп группы изометрий двумерной сферы.

§ 3.1. Платоновы тела в искусстве, философии и науке

Совершенство формы правильных многогранников привлекало великого художника и мыслителя Леонардо да Винчи, который

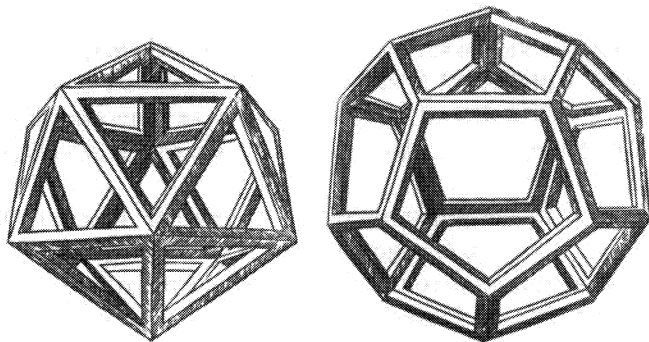


Рис. 3.1. Гравюры да Винчи: икосаэдр и додекаэдр

изображал их различными способами. Рисунок 3.1 воспроизводит две его гравюры правильных многогранников.

Некоторые философы и естествоиспытатели чувствовали почти мистическое влечение к этим удивительно симметричным формам. Так, великий астроном Кеплер обнаружил, что расстояния от планет до Солнца можно вычислить исходя из системы вписанных друг в друга платоновых тел (рис. 3.2 воспроизводит его причудливую гравюру).

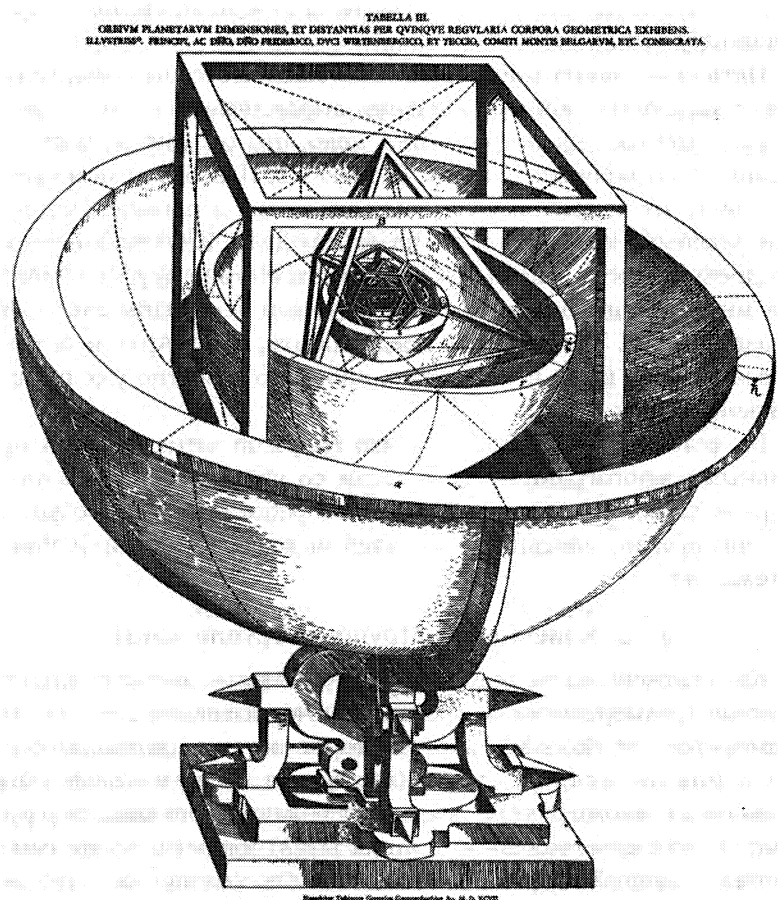


Рис. 3.2. Кеплеровская теория планетных орбит

На гравюре показан куб, вписанный в сферу, меньшая сфера, вписанная в этот куб, далее тетраэдр, вписанный в эту вторую сферу, третья сфера, додекаэдр, сфера, октаэдр, сфера, икосаэдр. Кеплер утверждал, что расстояния от пяти планет до Солнца пропорциональны расстояниям от вершин пяти вложенных многогранников до их общего центра симметрии. Он рассматривал это «открытие» как свое главное научное достижение, гораздо более значительное, чем три закона астрономии, которые носят его имя. К счастью для его самолюбия, он не дожил до дня, когда более точные измерения расстояний между Солнцем и планетами показали, что представления Кеплера были ошибочны.

Пять правильных многогранников были известны древним грекам, в частности философу Платону, выражавшему восхищение их уникальным совершенством столь ярко, что сегодня их часто называют «платоновыми телами». Разумеется, Платону нельзя приписать честь их открытия (они были известны и раньше), но остается неясным, кто открыл их на самом деле. Неочевидно также, что древние греки умели доказывать отсутствие других правильных многогранников или хотя бы ощущали необходимость такого доказательства. Можно лишь предполагать, что у Архимеда такое доказательство было и, возможно, оно было известно уже пифагорейской школе.

Во всяком случае известно, что Пифагор интересовался правильными многогранниками в связи со своей теорией «поющих сфер». В XX веке его идеи возродилась в работах немецкого физика Гейзенберга, но описание этих идей выходит за рамки учебника математики.

§ 3.2. Конечные подгруппы в группе $SO(3)$

Как отмечено выше, главная цель этой главы — доказать, что правильные трехмерные многогранники исчерпываются пятью платоновыми телами. Доказательство, которое мы здесь дадим, по существу принадлежит теории групп (мы сводим задачу классификации правильных многогранников к классификации конечных подгрупп специальной ортогональной группы $SO(3)$ или, что то же самое, группы движений сферы S^2). Это доказательство вполне естественно и в сущности более геометрично, чем утомительное стереометрическое доказательство, известное до появления понятия группы преобразований.

Вернемся к геометрии (кратко рассмотренной в гл. 1, см. п. 1.2.5) двумерной сферы

$$X = \mathbb{S}^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\},$$

которая задана действием группы изометрий $\text{Sym}(\mathbb{S}^2)$. (В курсах линейной алгебры эта группа определяется другим (но эквивалентным) способом, называется *ортогональной группой* и обычно обозначается $O(3)$.) Здесь мы будем иметь дело с подгруппой группы $O(3) = \text{Sym}(\mathbb{S}^2)$, состоящей из поворотов, а именно с группой $\text{Rot}(\mathbb{S}^2)$, каждый элемент которой — поворот сферы на некоторый угол φ , $0 \leq \varphi < 2\pi$, вокруг некоторой оси, проходящей через начало координат.

Наша цель — найти все конечные подгруппы в группе $SO(3)$. Начнем с некоторых примеров конечных подгрупп в группах $O(3)$ и $SO(3)$.

3.2.1. Моноэдральная группа \mathbb{Z}_n для произвольного $n \geq 2$. Ее n элементов — повороты вокруг одной и той же оси на углы $2k\pi/n$, где $k = 0, \dots, n-1$.

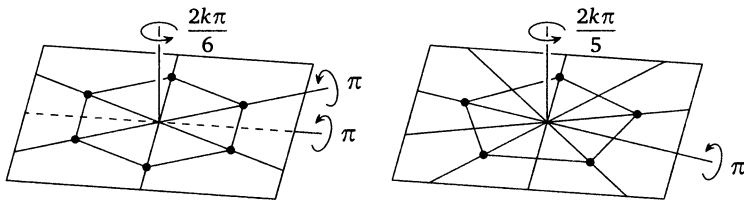


Рис. 3.3. Группа диэдра \mathbb{D}_n для $n = 6$ и для $n = 5$

3.2.2. Группа диэдра \mathbb{D}_n с произвольным $n \geq 2$. Эта группа из $2n$ элементов является группой изометрий правильного n -угольника (лежащего на горизонтальной плоскости Oxy и вписанного в сферу \mathbb{S}^2); она состоит из n поворотов (на углы $2k\pi/n$, $k = 0, 1, \dots, n-1$) и n отражений от горизонтальных прямых, проходящих через центр сферы, вершины и середины сторон (будьте осторожны: эти прямые различны для четных и нечетных n — посмотрите на рис. 3.3). Отметим, что отражения правильного n -угольника от горизонтальных прямых — это в действительности *повороты* в пространстве на 180° вокруг этих прямых.

3.2.3. Группа изометрий правильного тетраэдра. Эта группа состоит из 24 элементов и обозначается $\text{Sym}(\Delta^3)$, а ее подгруппа поворотов, состоящая из 12 элементов, имеет вид

$$\text{Rot}(\Delta^3) = \text{Sym}^+(\Delta^3) \subset \text{Sym}(\Delta^3);$$

группа $\text{Sym}(\Delta^3)$ состоит из 8 поворотов вокруг 4 осей (содержащих по одной вершине) на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, трех поворотов на угол π вокруг осей, соединяющих середины противоположных ребер, и тождественного преобразования. Легко видеть, что группа $\text{Sym}(\Delta^3)$ изоморфна группе перестановок S_4 . Но здесь мы рассматриваем эту группу геометрически, считая тетраэдр вписанным в сферу S^2 , а элементы группы — действующими на этой сфере.

3.2.4. Группа изометрий куба $\text{Sym}(I^3)$. В ней 48 элементов (см. п. 1.2.3); ее подгруппа поворотов состоит из 24 элементов:

$$\text{Rot}(I^3) = \text{Sym}^+(I^3) \subset \text{Sym}(I^3).$$

Соединив отрезками центр каждой из шести граней куба с четырьмя центрами соседних граней, получим каркас *октаэдра*, двойственного кубу (см. рис. 3.4). Октаэдр имеет 6 вершин и 8 треугольных граней; его группа изометрий, очевидно, та же, что у куба.

3.2.5. Группа изометрий додекаэдра $\text{Sym}(\text{Dod})$. Она содержит 120 элементов и включает подгруппу поворотов (из 60 элементов):

$$\text{Rot}(\text{Dod}) = \text{Sym}^+(\text{Dod}) \subset \text{Sym}(\text{Dod}).$$

Додекаэдр — это (правильный) многогранник (вписанный в сферу S^2) с 12 гранями (конгруэнтными правильными пятиугольниками), 30 ребрами и 20 вершинами (см. рис. 3.4). Существование такого многогранника будет доказано в конце этой главы. Соединив центры граней додекаэдра, имеющих общее ребро (снова посмотрим на рис. 3.4), получим *икосаэдр*, двойственный к додекаэдру;

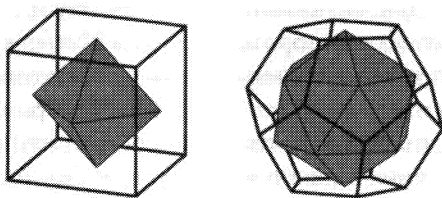


Рис. 3.4. Пары двойственных правильных многогранников

у него 20 граней, 30 ребер и 12 вершин. Его группа преобразований та же, что у додекаэдра.

Следующая теорема утверждает, что $SO(3)$ не имеет конечных подгрупп, кроме перечисленных выше.

Теорема 3.2.6. *Любая конечная нетривиальная подгруппа $G^+ \subset \text{Rot}(\mathbb{S}^2) = SO(3)$ изоморфна одной из следующих групп:*

(i) \mathbb{Z}_n , $n \geq 2$, (ii) \mathbb{D}_n , $n \geq 2$, (iii) $\text{Rot}(\Delta^3)$, (iv) $\text{Rot Rot}^+(I^3)$, (v) $\text{Rot}(\text{Dod})$.

Доказательство. Мы знаем, что любой элемент из $SO(3)$ (а следовательно, и из G^+) является поворотом вокруг диаметра сферы \mathbb{S}^2 и имеет две неподвижные точки (концы диаметра). Пусть F — множество неподвижных точек группы G^+ :

$$F = \{x \in \mathbb{S}^2 : \exists g \in G^+ \setminus \{\text{id}\} : xg = x\}.$$

Например, для группы \mathbb{Z}_n множество F состоит из двух точек, а для группы поворотов тетраэдра $\text{Rot}(\Delta^3)$ — из 14, а именно из 4 вершин, 4 точек пересечения осей поворота граней со сферой и 6 точек пересечения со сферой трех осей поворота, проходящих через середины противоположных ребер тетраэдра.

Рассмотрим (конечную) геометрию $(F : G^+)$. Пусть A — множество, содержащее по одной точке из каждой орбиты группы G^+ на множестве F .

Лемма 3.2.7. *Количество точек в множестве F равно*

$$|F| = |A| \cdot |G^+| - 2(|G^+| - 1). \quad (3.1)$$

Доказательству этого факта посвящена задача 3.3 в конце этой главы. Применив формулу классов (1.2), можно записать

$$|F| = \sum_{a \in A} \frac{|G^+|}{v(a)}, \quad \text{где } v(a) := |\text{St}(a)|.$$

Отметим, что $v(a)$ — порядок подгруппы поворотов в G^+ , порожденной поворотами вокруг оси, содержащей a , и что для любой другой точки a' из той же орбиты выполняется равенство $v(a) = v(a')$ (последнее утверждение вытекает из тождества (1.1): $|G^+| = |\text{Orb}(x) \cdot \text{St}(x)|$).

Заменив $|F|$ его значением, найденным в лемме, и разделив на $|G^+|$, получаем

$$2 - \frac{2}{|G^+|} = \sum_{a \in A} \left(1 - \frac{1}{v(a)}\right). \quad (3.2)$$

Разрешим это уравнение относительно $|G^+|$:

$$|G^+| = \left[1 - \frac{1}{2} \cdot \sum_{a \in A} \left(1 - \frac{1}{v(a)} \right) \right]^{-1}. \quad (3.3)$$

Важным следствием формулы (3.2) является следующее неравенство:

$$2 > \sum_{a \in A} \left(1 - \frac{1}{v(a)} \right). \quad (3.4)$$

Вначале рассмотрим случай, когда $|F| = 2$, т. е. когда имеется лишь одна ось поворота (пересекающая сферу в точках a_1 и $a_2 = -a_1$). В этом случае F распадается на две орбиты, каждая из одной точки, а именно $\{a_1\}$ и $\{a_2\}$. Тогда G^+ состоит из конечного количества поворотов вокруг единственной оси (a_1, a_2) и, значит, $G^+ \cong \mathbb{Z}_n$ для некоторого $n \geq 2$. Таким образом, для случая $|F| = 2$ теорема доказана. Отметим, что в этом случае (далее — случай 1) выполнено равенство $v(a_1) = v(a_2) = n = |G^+|$.

Пусть теперь $|F| > 2$. Тогда имеется не менее двух осей поворота. Рассмотрим поворот вокруг одной из них и возьмем композицию с вращением вокруг другой оси. Получим поворот вокруг некоторой третьей оси, и потому $|F| \geq 6$.

Лемма 3.2.8. *Если $|F| \geq 6$, то в геометрии $(F : G^+)$ имеется не менее трех орбит.*

Доказательство. Предположим противное: пусть орбит всего две, $A = \{a_1, a_2\}$. Из леммы 3.2.7 и равенства $|A| = 2$ получаем $|F| = 2|G^+| - 2(|G^+| - 1) = 2$, что противоречит условию $|F| \geq 6$. Лемма доказана.

Пусть $A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$; по лемме 3.2.8 имеем $k \geq 3$. Положим $v_i := v_i(a_i)$, $i = 1, \dots, k$; без ограничения общности можно считать, что $v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_k$. Мы утверждаем, что $v_1 = 2$, т. е. *существует хотя бы одна ось поворота степени 2* (на угол π).

Действительно, пусть $v_1 \geq 3$. Тогда правую часть неравенства (3.4) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{v_1} \right) + \left(1 - \frac{1}{v_2} \right) + \left(1 - \frac{1}{v_3} \right) + \dots &\geq \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} \right) + \left(1 - \frac{1}{3} \right) \geq 3 - 1 = 2, \end{aligned}$$

и мы получаем противоречие с тем, что это выражение должно быть строго меньше двух. Тем самым доказано, что количество орбит не меньше трех (если $|F| \geq 6$).

Теперь мы утверждаем, что *существуют ровно 3 орбиты*. Снова оценим правую часть неравенства (3.4) в предположении, что количество орбит четыре или больше (и с учётом неравенства $2 = \nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3$):

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\nu_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\nu_3}\right) + \left(1 - \frac{1}{\nu_4}\right) + \dots &\geq \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{2}\right) + 3\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \dots \geq \frac{5}{2}, \end{aligned}$$

и мы получаем противоречие с тем, что это выражение должно быть строго меньше двух. Тем самым доказано, что количество орбит равно трем во всех оставшихся случаях. \square

Итак, имеются три орбиты, так что в нашем случае неравенство (3.4) приобретает вид

$$\left(1 - \frac{1}{\nu_1}\right) + \left(1 - \frac{1}{\nu_2}\right) + \left(1 - \frac{1}{\nu_3}\right) < 2, \quad \text{где } 2 = \nu_1 \leq \nu_2 \leq \nu_3. \quad (3.5)$$

Мы получили диофантово неравенство относительно неизвестных $\nu_3 \geq \nu_2 \geq 2$. Легко проверяется, что его решения имеют вид $(2, 2, n)$, $(2, 3, 3)$, $(2, 3, 4)$, $(2, 3, 5)$. Покажем, что эти случаи отвечают группам \mathbb{D}_n ($n \geq 2$), $\text{Rot}(\Delta^3)$, $\text{Rot}(I^3)$, $\text{Rot}(\text{Dod})$ соответственно.

С помощью формулы (3.4) можно вычислить $|G^+|$, а затем найти $|F|$ из формулы (3.3) (или (3.2)). Полученные результаты сведены в следующую таблицу:

	ν_1	ν_2	ν_3	$ G^+ $	$ F $
Случай 1	n	n	—	n	2
Случай 2	2	2	n	$2n$	$n + 2$
Случай 3	2	3	3	12	14
Случай 4	2	3	4	24	26
Случай 5	2	3	5	60	62

В оставшейся части доказательства рассмотрим каждый случай отдельно и найдем (среди точек множества F) вершины многогранника (возможно, вырожденного), на котором действует G^+ . Затем покажем, что это действие — одно из перечисленных в утверждении теоремы, т. е. что найденный многогранник либо вырождается в правильный многоугольник, либо является тетраэдром, кубом или додекаэдром.

Случай 1, когда $|F| = 2$, рассмотрен выше, и мы показали, что ему соответствует группа \mathbb{Z}_n , $n \geq 2$.

Случай 2. Пусть $v_2 = 2$ и имеются две оси поворота l_1, l_2 порядка 2, т. е. с углом поворота 180° . Пусть Π — плоскость, проходящая через эти две оси. Рассмотрим прямую l_3 , перпендикулярную этой плоскости. Пусть n — порядок поворота вокруг оси l_3 , а a_3 — одна из точек ее пересечения со сферой. Теперь можно описать три орбиты в множестве F : это орбита из n точек, содержащая a_1 и лежащая в плоскости, перпендикулярной прямой l_3 и проходящей через центр сферы; орбита из n точек, содержащая a_2 и лежащая в той же плоскости; и орбита из двух точек, состоящая из a_3 и противоположной ей точки. Ясно теперь, что в нашем случае группа G^+ изоморфна группе диэдра \mathbb{D}_n . В частном случае $v_3 = 2$ многоугольник в плоскости Π , вращающийся вокруг прямой l , вырождается в отрезок, а G^+ есть четверная группа Клейна (обозначим ее \mathbb{D}_2).

Случай 3: $v_2 = v_3 = 3$, $|G^+| = 12$, $|F| = 14$. Возьмем теперь ось поворота, проходящую через a_1 , и повернем (на 180°) точку a_2 в положение b_1 . Затем повернем b_1 на 120° и на 240° , получив две новые точки b_2, b_3 . Из построения следует, что точки a_2, b_1, b_2, b_3 являются вершинами правильного тетраэдра (поскольку все его грани — равносторонние треугольники, в чем можно убедиться, вращая каждую грань вокруг противоположной вершины), а G^+ является группой поворотов $\text{Rot } \Delta^3$ этого тетраэдра.

Случай 4: $v_2 = 2$, $v_3 = 4$, $|G^+| = 24$, $|F| = 26$. Здесь стратегия доказательства аналогична случаю 3 с той лишь разницей, что теперь мы найдем 8 вершин куба (а не тетраэдра) среди точек множества F . А именно, начнем с поворота порядка 4, получим два квадрата, вписанных в сферу, затем с помощью других поворотов покажем, что эти два квадрата — на самом деле противоположные грани куба, и наконец установим, что 24 элемента группы G^+ являются симметриями этого куба, так что G^+ изоморфна группе $\text{Rot}(I^3)$.

Случай 5: $v_2 = 3$, $v_3 = 5$, $|G^+| = 60$, $|F| = 62$. Здесь стратегия доказательства аналогична случаям 3 и 4 с той разницей, что теперь мы строим додекаэдр с вершинами из F и получаем изоморфизм между G^+ и $\text{Rot}(\text{Dod})$. Подробности можно найти в задаче 3.10.

Таким образом, мы видим, что пять возможных случаев соответствуют группам, перечисленным в утверждении теоремы. Теорема доказана. \square

Следствие 3.2.9. Любая конечная подгруппа G группы $O(3)$ изоморфна или одной из групп, перечисленных в теореме 3.2.6, или одной из следующих групп:

- (i) S_4 , (ii) $\text{Sym}(I^3)$, (iii) $\text{Sym}(\text{Dod})$.

Доказательство. Пусть G — конечная подгруппа в $SO(3)$, а G^+ — ее подгруппа, состоящая из поворотов. По теореме 3.2.6 группа G^+ изоморфна одной из пяти групп, перечисленных в теореме. Вся группа G , если она не входит в $SO(3)$, порождена элементами из G^+ и одним отражением от плоскости, проходящей через начало координат. Поэтому она изоморфна одной из трех групп, перечисленных в следствии. \square

§ 3.3. Пять правильных многогранников

Правильный многогранник — это, по определению, выпуклый многогранник (вписанный в сферу S^2) со следующим свойством:

(i) все его грани — конгруэнтные правильные k -угольники с k сторонами для некоторого $k > 2$;

(ii) концы всех ребер, исходящих из любой данной вершины, лежат в одной плоскости и образуют правильный l -угольник для некоторого $l > 2$.

Теорема 3.3.1. Существуют ровно пять различных правильных многогранников: тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр.

Доказательство. Эта теорема вытекает из следствия теоремы 3.2.6. В самом деле, из определения следует, что группа вращений правильного многогранника конечна и, следовательно, изоморфна одной из групп, перечисленных в теореме 3.2.6. Две «серии» (i) и (ii) не приводят к (невырожденным) многогранникам (почему?). В случае (iii) получаем тетраэдр (так как его группа симметрий изоморфна группе перестановок S_4). В случае (iv) получаем куб и двойственный ему октаэдр, а в случае (v) — додекаэдр и двойственный ему икосаэдр. \square

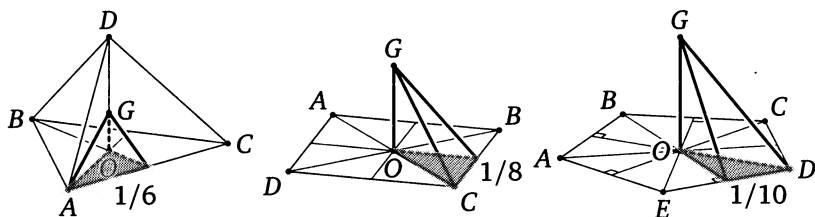


Рис. 3.5. Фундаментальные области платоновых тел

Таким образом, мы получили пять геометрий с тремя различными действиями групп (тетраэдр, куб \sim октаэдр, додекаэдр \sim икосаэдр). Чтобы представить себе действие групп в этих геометриях, полезно взглянуть на их фундаментальные области (рис. 3.5).

Во всех пяти случаях каждая фундаментальная область — пирамида с вершиной в центре тела, основанием которой является фундаментальная область группы изометрий грани, во всех случаях — прямоугольный треугольник. Острые углы этих треугольников равны 30° (тетраэдр, октаэдр, икосаэдр), 45° (куб), 54° (додекаэдр).

§ 3.4. Пять кеплеровых кубов

Кеплер заметил, что куб можно вписать в додекаэдр пятью различными способами. Здесь мы осуществим противоположное построение: начав с куба, построим описанный около него додекаэдр. Это докажет существование додекаэдра.

Рассмотрим два экземпляра $ABCDE$ и $A'B'C'D'E'$ правильного пятиугольника с диагоналями длины 1. Поместим эти пятиугольни-

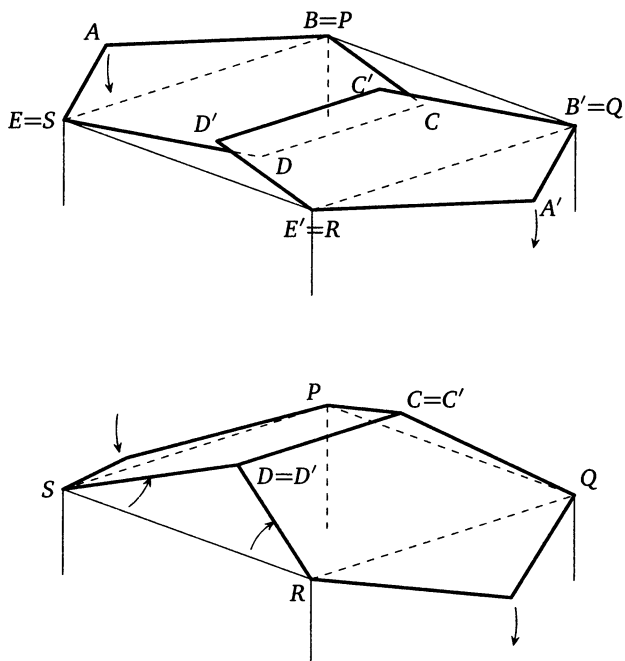


Рис. 3.6. Построение додекаэдра

ки в плоскость единичного квадрата $PQRS$ так, что диагонали BE и $B'E'$ совпадают с PS и QR соответственно, а CD параллельно $C'D'$. Вращая пятиугольники в пространстве вокруг PS и QR , совместим стороны CD и $C'D'$, расположив их над квадратом $PQRS$.

Пусть теперь $PQRS$ является верхней гранью единичного куба $PQRSP'Q'R'S'$. Поместим еще два пятиугольника на грань куба $SRR'S'$ таким же образом, как выше, так, что их параллельные стороны параллельны SR . Будем вращать эти пятиугольники, пока их параллельные стороны не совместятся. Нетрудно доказать, что вершина повернутого пятиугольника с диагональю SR совпадет с одним из концов общей стороны первых двух пятиугольников. Выполним аналогичные построения на других гранях куба. Полученный таким образом многогранник будет додекаэдром.

§ 3.5. Правильные многогранники в высших размерностях

В размерностях $n > 3$ имеется теорема классификации правильных n -мерных многогранников, аналогичная трехмерному случаю. Удивительным образом количество типов многогранников убывает с ростом n , меняясь от пяти (при $n = 3$) и шести ($n = 4$) до трех (при $n \geq 5$). Таким образом, вместо растущего разнообразия правильных тел, которого можно было ожидать в высших размерностях, остаются лишь три из них — аналоги тетраэдра, куба и многогранника, двойственного к кубу.

В этом параграфе, дав необходимые определения, мы сформулируем без доказательства соответствующие теоремы классификации.

3.5.1. Примеры и определения. Начнем с простого примера: это *четырёхмерный куб*. В евклидовом пространстве \mathbb{R}^4 рассмотрим 16 точек $(\pm 1, \pm 1, \pm 1, \pm 1)$; их выпуклая оболочка по определению есть *четырёхмерный куб*. Его проекция на плоскость показана на рис. 3.7.

Еще проще устроен (как указывает его название¹) *правильный n -мерный симплекс Δ^n* , который является n -мерным аналогом тетраэдра и определяется по индукции. А именно, пусть дан $(n - 1)$ -мерный (правильный) симплекс Δ^{n-1} , лежащий в пространстве \mathbb{R}^{n-1} . Из его центра тяжести восставим перпендикуляр в направлении n -го измерения (т.е. проведем прямую, параллельную базисному вектору $(0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^n \supset \mathbb{R}^{n-1}$). В качестве $(n + 1)$ -й вершины на-

¹ Simple (англ.) — простой.

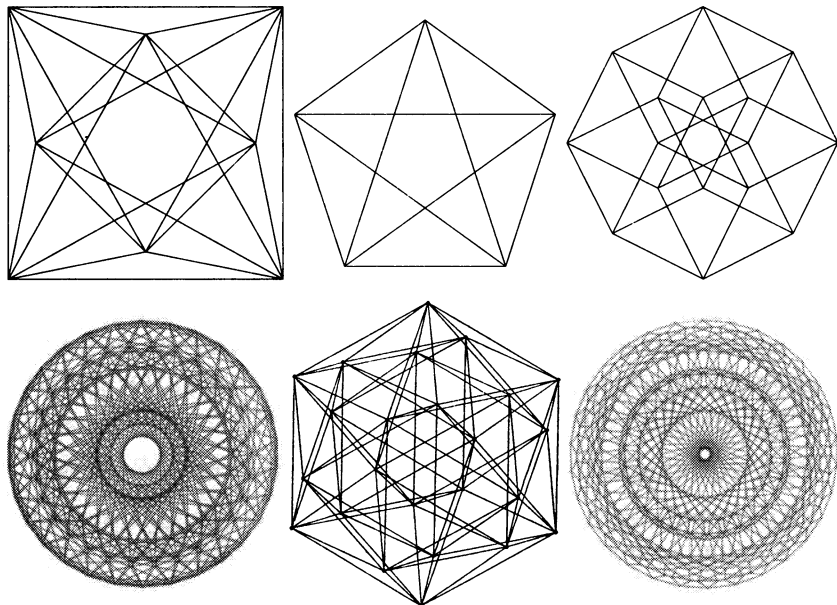


Рис. 3.7. Правильные четырехмерные многогранники

шего симплекса возьмем точку, расстояние от которой до n вершин симплекса Δ^{n-1} равно длине его ребер. Легко видеть, что группа преобразований симплекса Δ^n — это группа перестановок Σ_{n+1} .

Правильные n -мерные многогранники определяются по индукции. Индукция начинается с $n = 3$ и проводится так же, как для платоновых тел (см. выше § 3.3). Пусть определены правильные $(n - 1)$ -мерные многогранники. Тогда определим *правильный n -мерный многогранник* как выпуклый многогранник (вписанный в сферу $\mathbb{S}^{n-1} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 = 1\}$) со следующими свойствами:

(i) все его грани — конгруэнтные правильные $(n - 1)$ -мерные многогранники (правильные многоугольники при $n = 3$);

(ii) концы всех ребер, исходящих из одной и той же вершины, лежат в одной гиперплоскости и образуют правильный $(n - 1)$ -мерный многогранник; все такие многогранники конгруэнтны (но не обязательно совпадают с многогранниками из п. (i)).

Каждому правильному многограннику $P \subset \mathbb{R}^n$ можно поставить в соответствие его *символ*, который определяется (по индукции) как набор из n целых чисел $(r_1, r_2, \dots, r_{n-1})$, где (r_1, \dots, r_{n-2}) — символ лю-

бой из $(n - 1)$ -мерных граней многогранника P , а (r_2, \dots, r_n) — символ любого $(n - 1)$ -мерного многогранника, вершины которого — вторые концы ребер многогранника P , выходящих из данной вершины. Например, $(4, 3, 3)$ — символ четырехмерного куба, $(5, 3)$ — символ додекаэдра, $(3, 3, 3, 3)$ — символ пятимерного правильного симплекса.

Для любого правильного многогранника можно естественным образом определить двойственный ему (аналогично тому, как это сделано в размерности 3). Например, 5-симплекс двойствен себе, а 4-кубу двойствен так называемый кокуб, который имеет символ $(3, 3, 4)$.

Теорема 3.5.2. *В размерности 4 существуют 6 различных правильных многогранников; их символы равны*

$$(3, 3, 3), (4, 3, 3), (3, 3, 4), (3, 4, 3), (5, 3, 3), (3, 3, 5).$$

Читатель, который хочет найти доказательство этой теоремы, может обратиться к задаче 3.13, где упоминаются таинственные многогранники с символами $(3, 4, 3)$, $(5, 3, 3)$, $(3, 3, 5)$.

Теорема 3.5.3. *В размерности $n \geq 5$ существуют три различных правильных многогранника: n -мерный симплекс, n -мерный куб и n -кокуб; их символы равны соответственно*

$$(3, 3, \dots, 3, 3), (4, 3, \dots, 3, 3), (3, 3, \dots, 3, 4).$$

Доказательство мы опустим (см. [1]); читатель может также обратиться к задаче 3.14.

§ 3.6. Задачи

3.1. Правильная шестиугольная пирамида вписана в сферу \mathbb{S}^2 . Найдите ее группу симметрий (т.е. изометрий) и ее группу движений. Как соотносится ответ с теоремой о конечных подгруппах в $SO(3)$?

3.2. Ответьте на те же вопросы, что в задаче 3.1, если дана:

- а) правильная шестиугольная призма;
- б) правильная пятиугольная усеченная пирамида;
- в) двойная правильная шестиугольная пирамида (т.е. объединение двух правильных шестиугольных пирамид с общим основанием и вершинами в полюсах сферы).

3.3. Пусть G^+ — конечная подгруппа группы $SO(3)$, действующая на сфере \mathbb{S}^2 , а F — множество всех неподвижных точек нетри-

виальных элементов из G^+ ; докажите, что F инвариантно относительно действия группы G^+ , причем

$$|F| = |G^+| \cdot |A| - 2(|G^+| - 1),$$

где $A \subset F$ — множество, содержащее ровно по одной точке каждой орбиты действия G^+ на множестве F .

3.4. Существует ли в группе движений куба подгруппа, изоморфная группе движений правильного тетраэдра?

3.5. Существует ли в группе движений додекаэдра подгруппа, изоморфная группе движений куба?

3.6. В группе движений куба найдите все подгруппы, изоморфные группам \mathbb{Z}_n и \mathbb{D}_n для всевозможных значений n . Есть ли в ней еще какие-либо подгруппы?

3.7. Подробно докажите существование додекаэдра.

3.8. Дан куб с группой движений G^+ , вписанный в сферу. Пусть множество F состоит из всех вершин куба и всех точек пересечения прямых, соединяющих центры его противоположных граней или соединяющих середины противоположных ребер. Докажите, что G^+ действует на множестве F , найдите все орбиты этого действия и стабилизаторы всех точек из F . (Сравните с доказательством теоремы 3.2.6, случай 4.)

3.9. Дан правильный тетраэдр с группой движений G^+ , вписанный в сферу. Пусть множество F состоит из всех его вершин и всех прямых, соединяющих середины ребер. Докажите, что G^+ действует на множестве F , найдите все орбиты этого действия и стабилизаторы всех точек из F . (Сравните с доказательством теоремы 3.2.6, случай 3.)

3.10. Дан додекаэдр с группой движений G^+ , вписанный в сферу. Пусть множество F состоит из всех его вершин и всех точек пересечения прямых, соединяющих центры противоположных граней или соединяющих середины ребер, со сферой. Докажите, что G^+ действует на множестве F , и завершите доказательство теоремы 3.2.6 в случае 5.

3.11. Докажите теорему 3.2.6 в случае 4, построив из точек множества F октаэдр (вместо куба).

3.12. Изобразите на компьютере проекцию пятимерного куба на подходящую двумерную плоскость. Сравните с рис. 3.8.

3.13*. Докажите теорему классификации правильных многогранников в размерности 4.

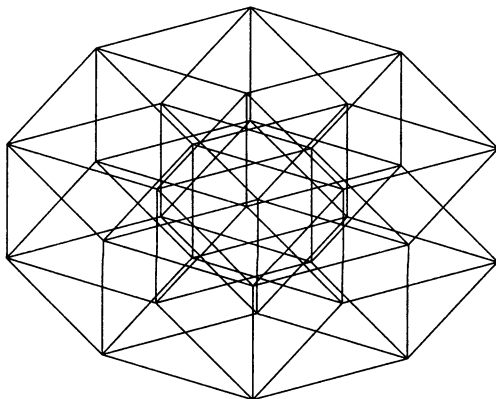


Рис. 3.8. Проекция ребер пятимерного куба

3.14*. Докажите теорему классификации правильных многогранников в размерности 5.

Глава 4

Дискретные подгруппы в группе изометрий плоскости. Замощения

Эта глава, как и предыдущая, посвящена классификации объектов, вызывавших интерес уже много веков назад — вначале скорее эстетический, чем научный. Это правильные замощения, т. е. конфигурации из одинаковых фигур, заполняющих плоскость некоторым регулярным образом. Каждое правильное замощение задает геометрию в смысле Клейна; оказывается, с точностью до изоморфизма существует 17 таких геометрий, и их классификацию можно получить, исследуя соответствующие группы преобразований — дискретные подгруппы (определение см. в § 4.3) группы изометрий евклидовой плоскости.

§ 4.1. Замощения в архитектуре, искусстве и науке

В архитектуре правильные замощения появляются, например, как декоративные мозаики (рис. 4.1) в знаменитом дворце Альгамбра (XIV век, Испания). Согласно М. Берже [1] и Б. Грюнбауму [13] в мозаиках Альгамбры реализованы упомянутые выше 17 геометрий.

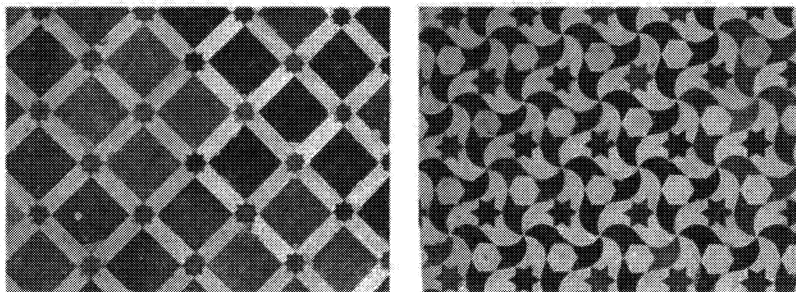


Рис. 4.1. Две мозаики из Альгамбры

Если говорить о живописи, то знаменитый голландский художник М. Эшер, автор «невозможных» картин, использовал правиль-

ные замощения как геометрическую основу своих удивительных «периодических» акварелей. Две из них показаны на рис. 4.2.



Рис. 4.2. Две периодические акварели Эшера

С научной точки зрения важны не только правильные замощения: можно замостить плоскость экземплярами одной или двух плиток неправильным (непериодическим) образом.

Есть много легких способов непериодически заполнить плоскость прямоугольными плитками размера, скажем, 10×20 см. Но не очевидно, что \mathbb{R}^2 можно непериодически замостить невыпуклыми девятиугольниками. Удивительная конструкция такого замощения, найденная Фордербергом (1936 г.), показана на рис. 4.3. На нем видно,

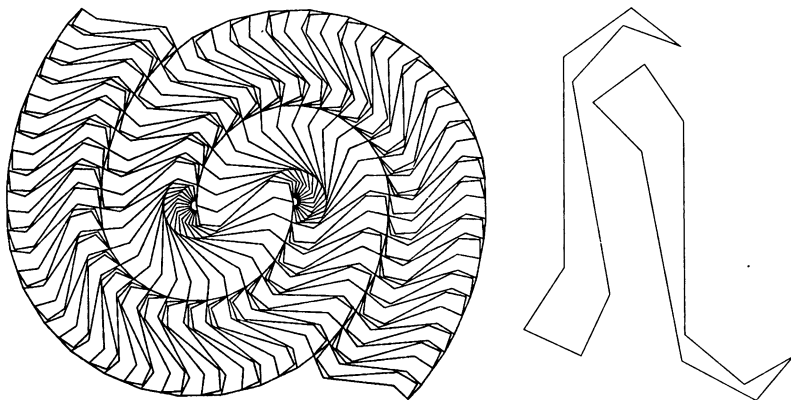


Рис. 4.3. Замощение Фордерберга

как заполнить плоскость экземплярами двух таких плиток (они показаны отдельно с увеличением; две эти плитки — зеркальные отражения друг друга). Нужно, приложив одну к другой, построить две спирально закрученные полосы, заполняющие всю плоскость.

Несколько позже, в 1960-х гг., интерес к неперIODическим замощениям возродился благодаря британскому математическому физик Роджеру Пенроузу в связи со статистическими моделями и изучением квазикристаллов. Позже неперIODические замощения привлекли внимание математиков, в частности филдсовского лауреата 2006 г. Андрея Окунькова в его исследовании трехмерных диаграмм Юнга.

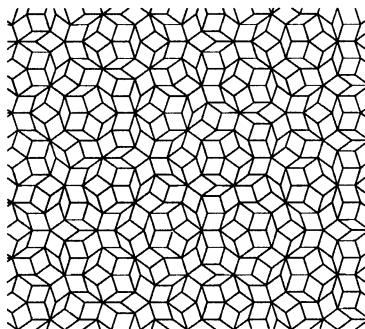


Рис. 4.4. Замощение Пенроуза

§ 4.2. Замощения и кристаллография

Теорему о классификации правильных замощений (определение см. ниже в п. 4.5.1) впервые доказал русский кристаллограф Е. С. Фёдоров в 1891 г. С точки зрения математики они соответствуют специальным дискретным подгруппам в группе изометрий плоскости $\text{Sym}(\mathbb{R}^2)$, носящим теперь название *фёдоровских групп*. Как отмечено выше, существует 17 таких групп (с точностью до изоморфизма). Фёдоровские группы действуют на евклидовой плоскости, порождая 17 различных (т. е. неизоморфных) геометрий в смысле Клейна; будем называть их *геометриями замощений*.

Доказательство, приведенное в этой главе, как и доказательство из предыдущей главы, является теоретико-групповым и основано на исследовании дискретных подгрупп группы изометрий плоскости. На самом деле принцип классификации нельзя сформулировать, не используя группы преобразований, и на первый взгляд трудно понять, как смогли создатели Альгамбры, за пять веков до возникновения математического понятия группы, действительно найти все 17 правильных замощений (в связи с этим см. статью Б. Грюнбаума [13], в которой мне удалось найти 13 из 17-ти замощений). Однако по существу это не удивительно: при глубоком понимании симметрии можно найти ответ на интуитивно ясный вопрос, даже не умея сформулировать его на языке современной математики.

Не столь наглядно, но более важно для приложений (в кристаллографии) трехмерное обобщение понятия правильного замощения: это конфигурации одинаковых многогранников, регулярно заполняющие \mathbb{R}^3 . На математическом языке они также определяются в терминах дискретных подгрупп группы изометрий пространства \mathbb{R}^3 , которые называются *кристаллографическими группами*. Известна их классификация: в ней 230 конфигураций. Их изучение выходит за рамки этой книги.

Здесь мы рассматриваем двумерную ситуацию и поэтому напомним вначале некоторые факты из элементарной планиметрии, относящиеся к структуре изометрий плоскости \mathbb{R}^2 .

§ 4.3. Изометрии плоскости

Напомним, что $\text{Sym}(\mathbb{R}^2)$ обозначает группу изометрий (т. е. преобразований, сохраняющих расстояния) плоскости \mathbb{R}^2 , а $\text{Sym}^+(\mathbb{R}^2)$ — ее группу движений (т. е. изометрий, сохраняющих ориентацию). Примерами последних служат параллельные переносы и повороты, тогда как отражения от прямой — примеры изометрий, не являющихся движениями (они меняют ориентацию).

(Мы считаем, что изометрия меняет ориентацию, если она переводит окружность, ориентированную по часовой стрелке, в окружность, ориентированную против часовой стрелки. Это не математическое определение, поскольку оно апеллирует к физическому понятию «вращения по часовой стрелке», но в курсах линейной алгебры приводится простое и математически строгое определение изометрии, меняющей или сохраняющей ориентацию; оно использует знак определителя соответствующего линейного отображения.)

Ниже перечислен ряд известных фактов об изометриях плоскости; их доказательства включены в задачи в конце этой главы.

4.3.1. Классическая теорема элементарной планиметрии гласит, что любое движение есть либо параллельный перенос, либо поворот (см. задачу 4.1).

4.3.2. Менее известный, но столь же важный факт: любая изометрия, меняющая ориентацию, является скользящей симметрией, т. е. композицией отражения от некоторой прямой и параллельного переноса на вектор, коллинеарный этой прямой (задача 4.2).

4.3.3. Композиция двух поворотов является поворотом (кроме особого случая, когда два угла поворота равны, но противоположно

ориентированы: тогда композиция является параллельным переносом). В общем случае нетрудно построить центр и угол композиции двух поворотов (см. задачу 4.3). Этот важный факт играет ключевую роль в доказательстве теоремы о классификации правильных замощений.

4.3.4. Композиция поворота и параллельного переноса является поворотом на тот же угол вокруг точки, полученной параллельным переносом центра данного поворота на данный вектор переноса (задача 4.4).

4.3.5. Композиция двух отражений относительно пересекающихся прямых l_1 и l_2 является поворотом вокруг точки пересечения этих прямых на угол, равный удвоенному углу между l_1 и l_2 (в каком именно направлении сказано в задаче 4.5).

§ 4.4. Дискретные группы и дискретные геометрии

Действие группы G на пространстве X называется *дискретным*, если ни одна из его орбит не имеет точек накопления, т. е. не существует точки $x \in X$, любая окрестность которой содержит бесконечно много точек одной и той же орбиты. Здесь под пространством можно понимать евклидово пространство \mathbb{R}^n (или его подмножество), но определение применимо в любом метрическом или топологическом пространстве.

Простым примером дискретной группы, действующей на плоскости \mathbb{R}^2 , служит группа всех параллельных переносов вида $k\vec{v}$, где v — фиксированный ненулевой вектор и $k \in \mathbb{Z}$. Множество всех поворотов плоскости вокруг начала координат на углы, кратные $\sqrt{2}\pi$, является группой, но его действие на \mathbb{R}^2 не дискретно (число $\sqrt{2}$ иррационально, поэтому орбитами являются плотные подмножества окрестностей с центром в начале координат).

§ 4.5. Семнадцать правильных замощений

4.5.1. Формальные определения. По определению *замощение* плоскости \mathbb{R}^2 многоугольником T_0 (*плиткой*) есть бесконечное семейство $\{T_1, T_2, \dots\}$ попарно неперекрывающихся (т. е. не имеющих общих внутренних точек) экземпляров T_0 , заполняющее плоскость:

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i.$$

Например, нетрудно различными способами замостить плоскость любым прямоугольником — скажем, в виде прямоугольной решетки или многими нерегулярными, непериодическими способами. Другое хорошо известное замощение плоскости — ее покрытие *сотами*, когда плоскость заполняется одинаковыми правильными шестиугольниками.

Многоугольник $T_0 \subset \mathbb{R}^2$ называется *фундаментальной плиткой* и задает *правильное замощение* плоскости \mathbb{R}^2 , если в группе изометрий плоскости $\text{Sym}(\mathbb{R}^2)$ существует подгруппа G (называемая *группой замощения*) со следующими свойствами:

(i) группа G действует дискретно на \mathbb{R}^2 , т. е. все ее орбиты не имеют точек накопления;

(ii) образы многоугольника T_0 при действии группы G заполняют плоскость, т. е. $\bigcup_{g \in G} g(T_0) = \mathbb{R}^2$;

(iii) если $g, h \in G$, то образы $g(T_0)$, $h(T_0)$ фундаментальной плитки совпадают тогда и только тогда, когда $g = h$.

На самом деле из свойств (ii) и (iii) следует (i), но мы не будем это доказывать (см. первый том книги Берже [1]).

Действие группы замощения $G \subset \text{Sym}(\mathbb{R}^2)$ на плоскости \mathbb{R}^2 , разумеется, задает геометрию в смысле Клейна. Мы будем называть ее *геометрией замощения* (или *фёдоровской геометрией*) группы G .

4.5.2. Примеры правильных замощений. Шесть примеров правильных замощений показаны на рис. 4.5.

Для данных двух плиток существует один элемент группы преобразований, который переводит одну в другую. Вопросительные знаки показывают, как именно это происходит. (Без вопросительных знаков действие группы преобразований не было бы определено; см. задачу 4.16).

Первые пять замощений ($a—d$) *положительны* (говорят еще *односторонние*), т. е. соответствуют в группе $\text{Sym}^+(\mathbb{R}^2)$ подгруппам группы движений плоскости, порожденной всеми поворотами и параллельными переносами (плитки односторонние и скользят по плоскости). В шестом замощении (e) допускается переворачивание (двусторонних) плиток.

Рассмотрим подробнее соответствующие группы замощения.

Теорема 4.5.3 (Е. С. Фёдоров, 1891). *С точностью до изоморфизма существуют только пять различных односторонних геометрий замощения плоскости \mathbb{R}^2 . Они показаны на рис. 4.5 $a—d$.*

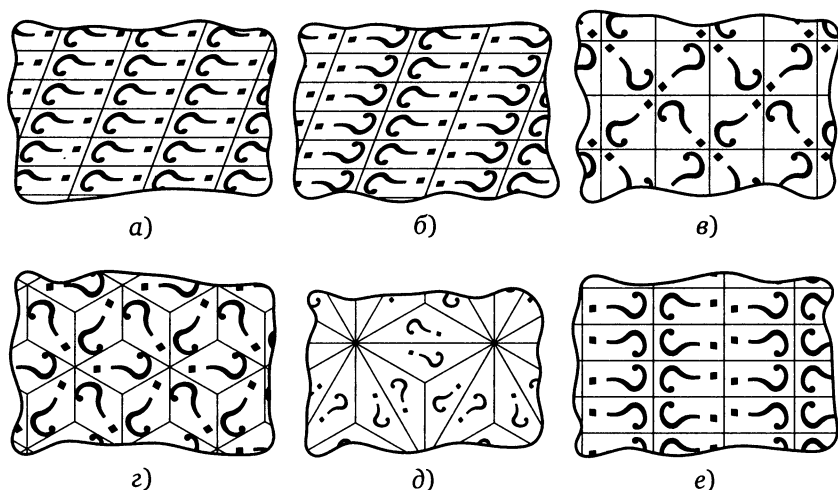


Рис. 4.5. Шесть правильных замощений плоскости

Доказательство. Пусть G — группа положительных замощений. Рассмотрим ее подгруппу G_T , состоящую из всех содержащихся в ней параллельных переносов.

Лемма 4.5.4. Подгруппа G_T порождается двумя неколлинеарными векторами v и u .

Доказательство. Предположим противное. Пусть группа G_T тривиальна (содержит только тождественный перенос), и пусть r, s — любые два (нетождественных) поворота с разными центрами. Тогда $rsr^{-1}s^{-1}$ — нетождественный параллельный перенос (для доказательства сделайте чертеж). Противоречие.

Пусть теперь все элементы из G_T — параллельные переносы, порожденные одним вектором v (т.е. переносы на пропорциональные ему векторы). Тогда нетрудно получить противоречие с п. (ii) в определении правильных замощений. \square

Далее, если G не содержит поворотов, т.е. $G = G_T$, то мы получаем замощение (а). Если же G содержит только повороты порядка 2, то легко видеть, что получается замощение (б).

Лемма 4.5.5. Если G содержит поворот порядка $\alpha \geq 3$, то G содержит еще два поворота порядков β и γ , для которых

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 1. \quad (4.1)$$

Набросок доказательства. Пусть A — центр поворота порядка α , а B и C — ближайшие (к A) центры поворотов, не получающиеся из A параллельными переносами. Тогда формула (4.1) вытекает из того, что сумма углов треугольника ABC равна π . Подробное доказательство этой леммы предоставляется читателю (см. задачу 4.3). \square

Поскольку порядок всех трех поворотов больше либо равен трем, из формулы (4.1) следует, что возможны только три случая:

	$1/\alpha$	$1/\beta$	$1/\gamma$
Случай 1	$1/3$	$1/3$	$1/3$
Случай 2	$1/2$	$1/4$	$1/4$
Случай 3	$1/2$	$1/3$	$1/6$

Перебирая эти случаи, легко установить, что они отвечают замощениям $г)$, $в)$, $д)$ на рис. 4.5.

Доказательство теоремы 4.5.3 завершено. \square

В общем случае (замощения любые, в том числе — двусторонними плитками) существует ровно семнадцать неэквивалентных замощений. Это также было доказано Фёдоровым. На рисунке 4.6 показаны все двенадцать двусторонних замощений.

Мы не будем доказывать вторую часть классификационной теоремы для правильных замощений плоскости (она состоит в отыскании оставшихся двенадцати правильных замощений двусторонними плитками). Однако читатель может познакомиться с примерами этих двенадцати замощений в задачах.

§ 4.6. 230 кристаллографических групп

Кристаллографические группы — это трехмерный аналог групп замощения в евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 . Соответствующие периодически повторяющиеся многогранники не только выглядят красивее, чем замощения, но и более важны: формы большинства этих многогранников соответствуют формам реальных кристаллов. Существует 230 кристаллографических групп. Доказательство этого факта весьма кропотливо: нужно рассмотреть 230 случаев, а на самом деле больше, так как многие логически возможные случаи оказываются невозможными геометрически. Как мы уже отметили, это доказательство лежит за рамками нашей книги.

Тем из вас, кто хотел бы видеть нетривиальные примеры геометрий, соответствующих каким-либо кристаллографическим группам,

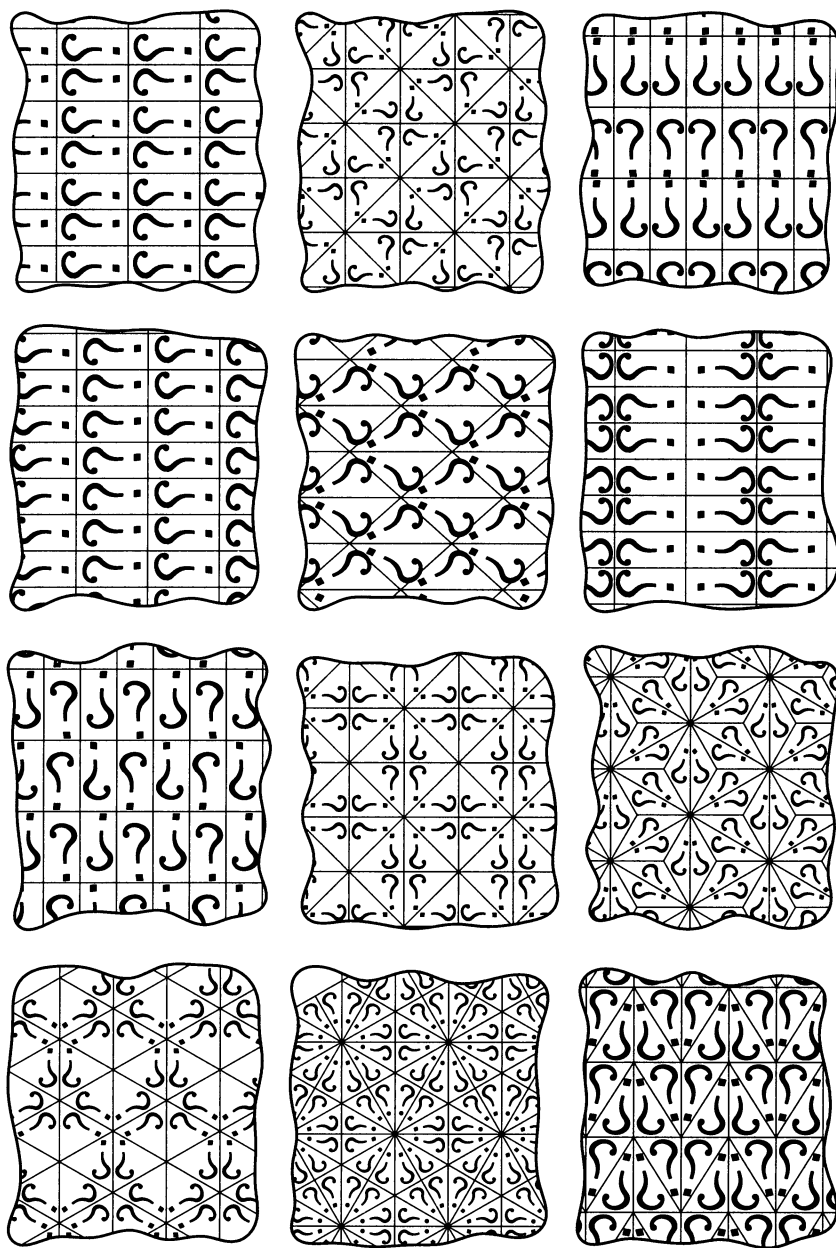


Рис. 4.6. Двусторонние правильные замощения

нужно ознакомиться с задачей 4.5 и/или отложить свое намерение до следующей главы, где четыре примера реальных кристаллов появятся в облике геометрий Кокстера. Можно также задать поисковику запрос «crystallographic groups» или «кристаллографические группы».

§ 4.7. Задачи

4.1. Докажите, что любое движение плоскости — либо параллельный перенос на некоторый вектор v , $|v| \geq 0$, либо поворот r_A вокруг некоторой точки A на ненулевой угол.

4.2. Докажите, что любая изометрия плоскости, не сохраняющая ориентацию, есть скользящая симметрия относительно некоторой прямой L с параллельным ей вектором сдвига u , $|u| \geq 0$.

4.3. Докажите, что композицию двух поворотов $r = (a, \varphi)$ и (b, ψ) можно построить следующим образом. Соединим точки a и b , повернем луч $[a, b)$ вокруг a на угол $\varphi/2$, повернем луч $[b, a)$ вокруг b на угол $-\psi/2$ и обозначим через c точку пересечения двух полученных лучей; тогда c является центром композиции rs , а ее угол поворота равен $2(\pi - \varphi/2 - \psi/2)$. Покажите, что такое построение невозможно в частном случае, когда углы поворотов равны, но противоположно ориентированы, и тогда их композиция — параллельный перенос.

4.4. Докажите, что композиция поворота и параллельного переноса — поворот на тот же угол, и найдите его центр.

4.5. Докажите, что композиция двух отражений от прямых l_1 и l_2 — поворот вокруг точки пересечения этих прямых на угол, вдвое больший ориентированного от l_1 к l_2 .

4.6. Укажите конечную систему образующих для групп преобразований, соответствующих замощениям, показанным на рис. 4.5 а–е.

4.7. Верно ли, что группа преобразований замощения, показанного на рис. 4.5 б, является подгруппой группы преобразований для рис. 4.5 в?

4.8. Укажите точки, которые являются центрами поворотов из группы преобразований замощения, показанного на рис. 4.5 в.

4.9. Укажите определяющие соотношения для группы изометрий плоскости, сохраняющих:

- а) правильную треугольную решетку;
- б) квадратную решетку;
- в) правильную шестиугольную решетку (соты).

4.10. Какими платоновыми телами можно заполнить трехмерное евклидово пространство (без перекрытий)?

4.11. Найдите в Интернете две картины Эшера, схематически показанные на рис. 4.2, и укажите, каким из семнадцати фёдоровских групп они соответствуют.

4.12. Ровно одна из семнадцати фёдоровских групп содержит скользящую симметрию, но не содержит отражений. Какая это группа?

4.13. Какие две из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот на угол $\pi/6$?

4.14. Какие три из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот на угол $\pi/2$?

4.15. Какие пять из семнадцати фёдоровских групп содержат поворот лишь на угол π ?

4.16. Переставьте вопросительные знаки в замощении (в) на рис. 4.5 так, чтобы получилась геометрия, изоморфная случаю замощения (а).

Глава 5

Группы отражений и геометрии Кокстера

В этой главе, как и в предыдущей, мы изучаем геометрии, заданные дискретными подгруппами группы изометрий плоскости (и, более общим образом, n -мерного пространства), а именно подгруппами, которые порождены отражениями (и называются группами Кокстера в честь канадского математика XX века, который их ввел). Эти геометрии, пожалуй, не столь красивы, как рассмотренные в предыдущих двух главах, но более важны для приложений (в алгебре и топологии). С другой стороны, они имеют эстетическое происхождение: примером такой геометрии служит картинка из калейдоскопа (детской игрушки, очень популярной в докомпьютерную эпоху). Следуя Э.Б. Винбергу, будем называть эти геометрии (в двумерном случае) калейдоскопами. Мы докажем для них классификационную теорему в размерности 2 и сформулируем без доказательства ее обобщение на высшие размерности (с помощью понятия схемы Кокстера).

§5.1. Пример: калейдоскоп

Калейдоскоп — это детская игрушка: яркие кусочки стекла, помещенные в правильную треугольную призму, многократно отражаются от трех зеркал, образующих три ее боковые грани.

Глядя на призму, вы видите повторяющийся цветной узор: картинка в треугольнике и ее зеркальные отражения чередуются, образуя шестиугольник (объединение шести равносторонних треугольников), окруженный равносторонними треугольниками, — и так до бесконечности (см. рис. 5.1а).

С точки зрения математики это явление двумерное: равносторонний треугольник, образующий основание призмы, является фундаментальной областью дискретной группы, действующей на плоскость основания.

Если теперь деформировать калейдоскоп (например, слегка изменить углы между гранями призмы), то картинка становится размытой, узора не получается. В этой ситуации образы исходного тре-

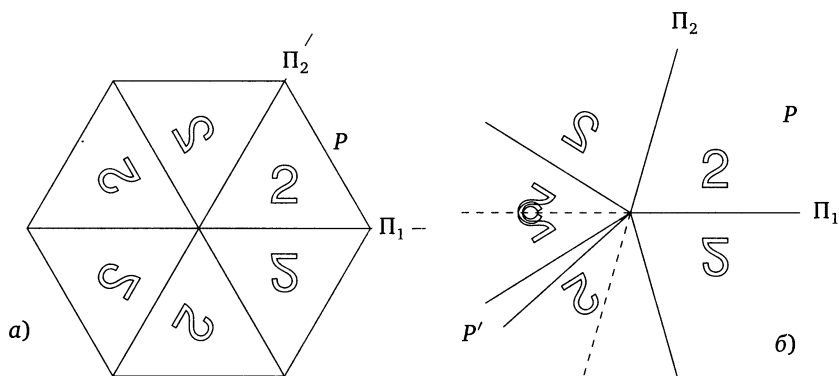


Рис. 5.1. Геометрия калейдоскопа

угольника могут перекрываться бесконечно много раз (см. рис. 5.1б) и тогда группа преобразований, действующая на треугольнике, не дискретна. Мы не станем заниматься этим «плохим» случаем: мы изучим лишь случай «хорошего» калейдоскопа в размерности два, а затем обобщим его на произвольные размерности.

§ 5.2. Многоугольники и многогранники Кокстера

Рассмотрим двугранный угол $\alpha < \pi/2$, образованный двумя плоскими двусторонними зеркалами Π_1, Π_2 . Что увидит глядя на них наблюдатель? Любая картинка P , расположенная внутри угла, отразится от Π_1 ; ее образ P' в свою очередь отразится от образа зеркала Π_1 при отражении от Π_2 , и т. д. В то же время картинка P отразится от Π_2 ; ее образ P'' в свою очередь отразится от образа зеркала Π_2 при отражении от Π_1 , и т. д. Возможны два случая: или отражения, приходящие с разных сторон, перекрываются (рис. 5.1б), или отраженные картинки совпадут (рис. 5.1а). Очевидно, картинки совпадут в том (и только том) случае, когда угол α имеет вид π/k , где $k = 2, 3, \dots$

В математическом смысле ситуация такова. На евклидовой плоскости возьмем две прямые, образующие угол α , и рассмотрим группу G всех преобразований плоскости, порожденных отражениями от этих прямых. Пусть F — область плоскости, ограниченная двумя лучами, образующими угол α . Очевидно, никакие две области $g(F)$ и $h(F)$, $g, h \in G$, $g \neq h$, не перекрываются в точности тогда, когда $\alpha = \pi/k$, где $k = 2, 3, \dots$ В этом случае G есть группа диэдра \mathbb{D}_k .

Пусть теперь на плоскости дан выпуклый многоугольник F с углами при вершинах, меньшими либо равными $\pi/2$. Рассмотрим группу преобразований плоскости G_F , порожденную отражениями от прямых, содержащих стороны многоугольника F . Мы говорим, что G_F действует транзитивно на F , если образы $g(F)$ при разных $g \in G_F$ не перекрываются. Для этого необходимо, чтобы все углы при вершинах многоугольника F имели вид π/k для тех или иных значений k ; это вытекает из сказанного в предыдущем абзаце. Очевидно, что это условие не является достаточным.

Предыдущие рассуждения служат мотивировкой следующего определения. Выпуклый многоугольник F называется *многоугольником Кокстера*, если углы при всех его вершинах имеют вид π/k , где $k = 2, 3, \dots$, и он порождает транзитивное действие группы G_F . Классификация многоугольников Кокстера проведена ниже — их всего четыре.

Сказанное можно обобщить на трехмерное пространство. Соответствующее определение таково: выпуклый многогранник P называется *многогранником Кокстера*, если все его двугранные углы имеют вид π/k , где $k = 2, 3, \dots$, и он порождает транзитивное действие группы преобразований, порожденной отражениями от плоскостей, содержащих его грани. Классификация многогранников Кокстера проведена ниже (их количество равно семи).

§ 5.3. Геометрии Кокстера на плоскости

Пусть F — многоугольник Кокстера на плоскости \mathbb{R}^2 . *Геометрия Кокстера* с фундаментальной областью F — это геометрия $(\mathbb{R}^2 : G_F)$, где G_F — группа преобразований плоскости, порожденная отражениями от прямых, содержащих стороны многоугольника F . Цель этого параграфа — классифицировать все геометрии Кокстера на плоскости.

Теорема 5.3.1. *С точностью до изоморфизма плоскости существуют четыре геометрии Кокстера; их фундаментальными многоугольниками являются прямоугольник, равносторонний треугольник, равнобедренный прямоугольный треугольник и прямоугольный треугольник с углами $\pi/3$ и $\pi/6$ (см. рис. 5.2).*

Доказательство. Пусть F — фундаментальный многоугольник геометрии Кокстера. Если у него n сторон, то сумма его углов равна $\pi(n - 2)$, а тогда среднее значение его угла составляет $\pi(1 - 2/n)$.

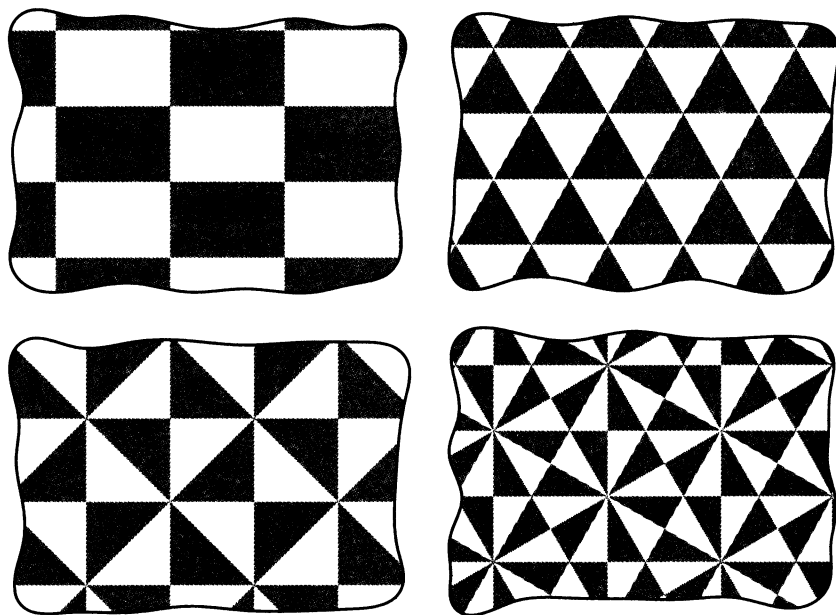


Рис. 5.2. Четыре плоских геометрии Кокстера

При этом n не может превосходить 4, поскольку иначе многоугольник имел бы тупой угол (это противоречит определению). Если $n = 4$, то все углы многоугольника равны $\pi(1 - 2/4) = \pi/2$, т. е. F является прямоугольником. Наконец, если $n = 3$, а углы фундаментального треугольника равны $\pi/k, \pi/l, \pi/m$, то (поскольку их сумма равна π) получаем диофантово уравнение для k, l, m :

$$\frac{1}{k} + \frac{1}{l} + \frac{1}{m} = 1.$$

У этого уравнения три решения: $(3, 3, 3)$, $(2, 4, 4)$, $(2, 3, 6)$. Эти решения соответствуют трем треугольникам из формулировки теоремы. \square

§ 5.4. Геометрии Кокстера в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3

5.4.1. В этом параграфе мы изучаем геометрии Кокстера в пространстве \mathbb{R}^3 . Многогранник Кокстера $F \subset \mathbb{R}^3$ — это выпуклый многогранник (т. е. ограниченная область пространства, полученная

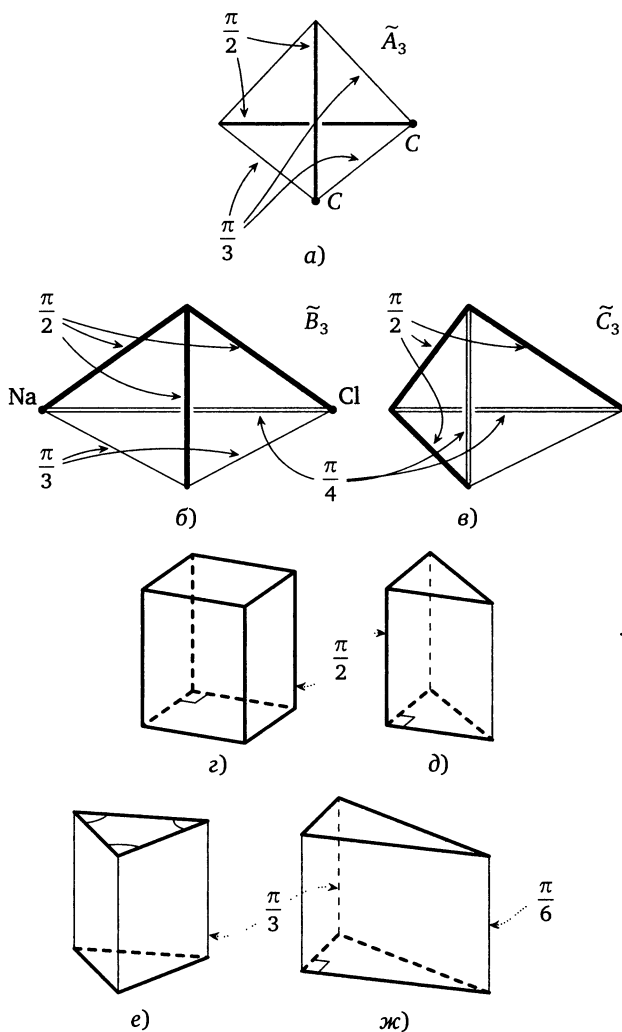


Рис. 5.3. Семь многогранников Кокстера в трехмерном пространстве

пересечением конечного числа полупространств) с двугранными углами вида π/k , где $k = 2, 3, \dots$

Геометрия Кокстера в пространстве \mathbb{R}^d с фундаментальным многогранником F определяется точно так же, как в случае $d = 2$ (см. § 5.3).

Теорема 5.4.2. *В трехмерном пространстве существуют семь геометрий Кокстера; их фундаментальные многогранники — четыре прямые призмы, основаниями которых являются прямоугольник, равносторонний треугольник, равнобедренный прямоугольный треугольник и прямоугольный треугольник с острыми углами $\pi/3$ и $\pi/6$, а также три (неправильных) тетраэдра, показанные на рис. 5.3.*

Не очень трудно доказать, что семь многогранников, перечисленных в теореме, действительно определяют геометрии Кокстера. Чтобы доказать, что других не существует, требуются нетривиальные сведения из линейной алгебры (в частности, понятие матрицы Грама). Поэтому мы опустим доказательство (см. книгу [11] и статьи в сборнике «Математическое просвещение», третья серия, вып. 7, 2003, с. 45—115).

Замечание о терминологии. Термин «геометрия Кокстера» не общепринят. Э. Б. Винберг использует вместо этого термина термин «калейдоскоп». При этом мы не будем называть «группой Кокстера» группу преобразований геометрии Кокстера, поскольку термин «группа Кокстера» обычно применяется в несколько ином смысле.

Группы Кокстера — не только абстрактный математический объект, но и важное средство моделирования в кристаллографии. Например, многогранник на рис. 5.3б — это кристалл обычной соли, а на рис. 5.3а изображен кристалл алмаза.

§ 5.5. Схемы Кокстера и классификационная теорема

5.5.1. В этом параграфе мы рассмотрим общий случай геометрии Кокстера в пространстве \mathbb{R}^d для произвольного натурального d . Многогранник Кокстера $F \subset \mathbb{R}^d$ — это выпуклый многогранник (т. е. ограниченная область пространства \mathbb{R}^d , полученная пересечением конечного числа полупространств) с двугранными углами вида π/k , где $k = 2, 3, \dots$, причем отражения от $(d - 1)$ -плоскостей, содержащих его грани, порождают группу G_F , действующую транзитивно. (Определение меры двугранного угла в евклидовом пространстве произвольной размерности d можно найти в курсе линейной алгебры.) Геометрия Кокстера в пространстве \mathbb{R}^d с фундаментальным многогранником F определяется точно так же, как в случаях $d = 2$ и $d = 3$ (см. § 5.2 и 5.3).

5.5.2. *Схема Кокстера* — это граф (с целыми весами, приписанными ребрам), который кодирует многогранник Кокстера (напри-

мер, многоугольник) в какой-то размерности d . Схема данного многогранника Кокстера строится следующим образом: ее вершины соответствуют граням многогранника; если две грани образуют угол π/m , $m \geq 3$, то соответствующие вершины соединяются ребром веса $m - 2$; если две грани параллельны, соответствующие вершины соединяются ребром веса ∞ . (Отметим, что вершины, соответствующие перпендикулярным ребрам, ребром не соединяются.)

Название	Схема Кокстера	Размерность	Количество граней	Реализация в \mathbb{R}^n , $n \leq 3$
\tilde{A}_1		1	2	
\tilde{A}_n		$n - 1$	n	
\tilde{B}_n		$n - 1$	n	
\tilde{C}_n		$n - 1$	n	
\tilde{D}_n		$n - 1$	$n \geq 5$	нет
\tilde{D}_4		4	5	нет
\tilde{F}_4		4	5	нет
\tilde{G}_2		2	3	
\tilde{E}_6				нет
\tilde{E}_7				нет
\tilde{E}_8				нет

Рис. 5.4. Схемы Кокстера для геометрий Кокстера

Вместо того чтобы писать на ребрах схемы веса 2, 3, 4, будем рисовать двойные, тройные, четверные ребра; чтобы обозначить бесконечный вес, будем чертить очень толстое ребро.

Например, схема Кокстера для прямоугольника состоит из двух компонент, каждая из которых имеет две вершины, соединенные ребром с бесконечным весом, а схема равностороннего треугольника имеет три вершины, соединенные по кругу тремя ребрами с весом 1.

Теорема 5.5.3. *Геометрии Кокстера во всех размерностях определяются связными компонентами своих схем Кокстера, приведенных на рис. 5.4.*

Доказательство мы опустим (см. [11], а также статьи в сборнике «Математическое просвещение», указанные выше).

§ 5.6. Задачи

5.1. Даны три плоскости P_1, P_2, P_3 , содержащие ось z евклидова пространства \mathbb{R}^3 . Углы между P_1 и P_2 , а также между P_2 и P_3 равны соответственно α и β .

а) При каких условиях на α и β отражения от данных трех плоскостей порождают конечную группу?

б) Если эти условия выполнены, как найти фундаментальную область такого действия?

5.2. Три прямые L_1, L_2, L_3 на евклидовой плоскости образуют треугольник с (внутренними) углами α, β и γ .

а) При каких условиях на α, β, γ отражения от трех данных прямых порождают дискретную группу?

б) Если эти условия выполнены, как найти фундаментальную область такого действия?

5.3. Рассмотрим шесть прямых L_1, \dots, L_6 , содержащие шесть сторон правильного плоского шестиугольника, и обозначим через G группу, порожденную отражениями от этих прямых. Задаёт ли эта группа геометрию Кокстера?

5.4. Пусть F — треугольник Кокстера, s_1, s_2, s_3 — отражения от его сторон, G_F — соответствующая группа преобразований.

а) Дайте геометрическое описание, а также описание словами в алфавите s_1, s_2, s_3 всех элементов группы G_F , оставляющих на месте данную вершину треугольника F .

б) Дайте геометрическое описание, а также описание словами в алфавите s_1, s_2, s_3 всех элементов группы G_F , являющихся параллельными переносами.

Рассмотрите отдельно случаи трех различных треугольников Кокстера.

5.5. Нарисуйте схемы Кокстера:

- а) для всех треугольников Кокстера;
- б) для всех трехмерных многогранников Кокстера.

5.6. Докажите, что все ребра, исходящие из вершины трехмерного многогранника Кокстера, лежат на трех прямых, проходящих через эту вершину.

5.7. Пусть $(F : G_F)$ — геометрия Кокстера произвольной размерности. Докажите следующее:

- а) если $s \in G_F$ — отражение от гиперплоскости P , то для любого $g \in G_F$ элемент $gs g^{-1}$ есть отражение от гиперплоскости gP ;
- б) любое отражение, принадлежащее группе G_F , сопряжено отражению от одной из граней многогранника F .

5.8. Опишите какой-либо четырехмерный многогранник Кокстера, отличный от четырехмерного куба.

5.9. а) Определяет ли геометрию Кокстера группа преобразований, порожденная отражениями от граней правильного тетраэдра?

- б) Тот же вопрос для куба.
- в) Тот же вопрос для октаэдра.
- г) Тот же вопрос для додекаэдра.

Глава 6

Сферическая геометрия

До сих пор мы изучали геометрии, в которых группа преобразований конечна или дискретна. В этой главе мы приступим к изучению бесконечных непрерывных геометрий, начав со сферической геометрии ($S^2 : O(3)$). Ей соответствует группа изометрий двумерной сферы, т.е. подгруппа всех изометрий пространства \mathbb{R}^3 , оставляющих на месте начало координат; в курсах линейной алгебры $O(3)$ называется *ортогональной группой*.

Вначале, однако, мы перечислим классические непрерывные геометрии, которые изучаются в нашем курсе. Некоторые из них, возможно, известны читателю, другие для него новы.

§ 6.1. Перечень классических непрерывных геометрий

Ниже перечислены, для дальнейших ссылок, несколько самых известных классических геометрий, в которых группы преобразований «непрерывны», а не конечны или дискретны. Мы не будем уточнять интуитивно ясное понятие непрерывной группы преобразований (для этого потребовалось бы дать определение так называемых *топологических групп* или даже *групп Ли*), поскольку мы не будем использовать это понятие в общем виде: это не требуется в нашем вводном курсе. В оставшейся части главы материал этого параграфа не потребуется, так что читатель, желающий без промедления ознакомиться со сферической геометрией, может непосредственно перейти к § 6.3.

6.1.1. *Конечномерные векторные пространства* над полем вещественных чисел являются геометриями в смысле Клейна (общее определение этих геометрий см. в гл. 1). В этом качестве их можно обозначить через

$$(\mathbb{V}^n : GL(n)),$$

где \mathbb{V}^n обозначает n -мерное векторное пространство над \mathbb{R} , а $GL(n)$ — полную линейную группу, т.е. группу всех невырожденных линейных отображений этого пространства в себя.

Подгеометрия такой геометрии, полученная заменой группы $GL(n)$ на ее подгруппу $O(n)$ (состоящую из ортогональных преобразований), называется *n-мерным ортонормированным векторным пространством* и обозначается

$$(\mathbb{V}^n : O(n)).$$

Эта «геометрия» в большой мере относится к алгебре и обычно изучается в курсе линейной алгебры. Мы предполагаем, что читатель знаком с линейной алгеброй и помнит простейшие основные определения и факты из нее.

6.1.2. Аффинные пространства — это, неформально говоря, конечномерные пространства векторов «без фиксированного начала». Это означает, что их группы преобразований $Aff(n)$ содержат, кроме $GL(n)$, все параллельные переносы (т. е. преобразования пространства, состоящие в прибавлении фиксированного вектора ко всем его элементам). Обозначим соответствующую геометрию через

$$(\mathbb{V}^n : Aff(n)) \quad \text{или} \quad (\mathbb{R}^n : Aff(n));$$

последнее обозначение показывает, что элементами пространства теперь считаются *точки*, т. е. концы векторов (исходящих из начала координат), а не сами векторы. Это более геометричное понятие, чем понятие векторного пространства, но оно обычно также изучается в курсах линейной алгебры.

6.1.3. Евклидовы пространства — это геометрии, которые мы обозначим через

$$(\mathbb{R}^n : Sym(\mathbb{R}^n));$$

здесь $Sym(\mathbb{R}^n)$ — группа изометрий евклидова пространства \mathbb{R}^n , т. е. группа его преобразований, сохраняющих расстояния. В качестве подгруппы в ней содержится *ортогональная группа* $O(n)$, которая состоит из всех изометрий, оставляющих начало координат на месте (группа $O(n)$ должна быть знакома читателю из курса линейной алгебры); кроме того, $Sym(\mathbb{R}^n)$ включает подгруппу параллельных переносов.

Мы предполагаем, что читатель знает из школы евклидову геометрию для $n = 2, 3$ (разумеется, там она вводится иначе, обычно с помощью некоторой модификации аксиом Евклида) и, кроме того, знаком со структурой групп изометрий евклидова пространства при $n = 2, 3$.

Читатель, испытывающий затруднения в элементарной евклидовой планиметрии и стереометрии, может обратиться к гл. 0. Строгий аксиоматический подход к евклидовой геометрии в размерностях $d = 2, 3$ (основанный на аксиомах Гильберта) можно найти в дополнении Б.

Отметим, что группы преобразований этих трех геометрий (векторные пространства, аффинные и евклидовы пространства) действуют на одном и том же пространстве (\mathbb{R}^n и \mathbb{V}^n естественным образом отождествляются), но они задают разные геометрии, поскольку группы $GL(n)$, $O(n)$, $Aff(n)$, $Sym(\mathbb{R}^3)$ различны. Соответствующие геометрии в этом курсе не изучаются: по традиции это делается в курсах линейной алгебры, и мы их упомянули лишь для полноты картины.

Наш список продолжают еще три классические геометрии, которые мы будем изучать, по крайней мере в малых размерностях (в основном в размерности 2).

6.1.4. Гиперболические пространства \mathbb{L}^n (или *пространства Лобачевского*) — это «пространства постоянной отрицательной кривизны» (что это значит — вы узнаете гораздо позже, в курсе дифференциальной геометрии). Соответствующая группа преобразований — это группа изометрий гиперболического пространства (т. е. группа преобразований, сохраняющих «гиперболическое расстояние»). Мы будем изучать лишь гиперболическое пространство размерности $n = 2$, т. е. гиперболическую плоскость. Мы рассмотрим три модели гиперболической плоскости, в частности *модель Пуанкаре на круге*,

$$(\mathbb{L}^2 : \mathcal{M});$$

здесь $\mathbb{H}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$ — открытый единичный круг, а \mathcal{M} — группа преобразований Мёбиуса (определение появится в гл. 7), отображающих круг в себя.

Мы также рассмотрим две другие модели гиперболической плоскости (*модель на полуплоскости*, также принадлежащую Пуанкаре, и *модель Кэли—Клейна*). В отдельной главе мы опишем, как попытки доказать пятый постулат Евклида привели к возникновению гиперболической геометрии, и изложим драматическую историю ее создания Гауссом, Лобачевским и Бойяи.

6.1.5. Эллиптические пространства $\mathbb{E}l^n$ — это «пространства постоянной положительной кривизны» (что это значит — объяс-

няется в курсах дифференциальной геометрии). В этой главе мы рассмотрим лишь двумерный случай, т. е. эллиптическую плоскость. Перед этим мы изучим *сферическую геометрию*, которая является главной темой этой главы, но может и рассматриваться как основной строительный блок двумерной эллиптической геометрии.

6.1.6. *Проективные пространства $\mathbb{R}P^n$ получаются из аффинных пространств, если определенным образом добавить к ним «бесконечно удаленные точки», а в качестве группы преобразований взять группу линейных преобразований так называемых «однородных координат» точек $(x_1 : \dots : x_n : x_{n+1}) \in \mathbb{R}P^n$. Можно обозначить эту геометрию через*

$$(\mathbb{R}P^n : \text{Proj}(n)).$$

Проективная геометрия для произвольного n обычно изучается в курсах линейной алгебры. В нашем курсе мы рассмотрим *проективную плоскость $\mathbb{R}P^2$* и лишь бегло взглянем на проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ (см. главу 12).

§ 6.2. Некоторые основные факты из евклидовой планиметрии

Ниже перечислены некоторые важнейшие факты из евклидовой планиметрии (включая современную формулировку некоторых постулатов Евклида), чтобы сравнить и противопоставить их соответствующим фактам из сферической, эллиптической и гиперболической геометрии.

I. *Существует единственная прямая, проходящая через две данные различные точки.*

II. *Существует единственный перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку. (Перпендикуляр к данной прямой — это прямая, образующая четыре равных угла — прямые углы — с этой прямой.)*

III. *Существует единственная окружность с данным центром и данным радиусом.*

IV. *Для любой точки на прямой и любого положительного числа существуют ровно две точки на этой прямой, расстояния от которых до данной точки равны данному числу.*

V. *Существует единственная прямая, параллельная данной прямой и проходящая через данную точку вне этой прямой. (Прямая параллельна данной прямой, если она не имеет с ней общих точек.)*

Это современная формулировка пятого постулата Евклида, который иногда называют самым важным и самым спорным научным утверждением всех времен.

VI. Для параметров произвольного треугольника ABC , а именно углов α, β, γ при вершинах A, B, C и сторон a, b, c , противоположных этим вершинам, выполнены следующие формулы.

(i) Формула суммы углов: $\alpha + \beta + \gamma = \pi$.

(ii) Теорема синусов: $\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma}$.

(ii) Теорема косинусов: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma$.

§ 6.3. Прямые, расстояния, углы, полярные и перпендикуляры на S^2

Пусть S^2 — единичная сфера в пространстве \mathbb{R}^3 :

$$S^2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 1\};$$

наша ближайшая цель — изучить геометрию $(S^2 : O(3))$, где $O(3)$ — ортогональная группа (т.е. группа изометрий пространства \mathbb{R}^3 , оставляющих начало координат на месте).

6.3.1. Основные определения. Прямая на сфере далее означает большую окружность, т.е. пересечение сферы с плоскостью, проходящей через ее центр. Например, экватор сферы, как и меридиан, — это прямая. Угол между двумя прямыми определяется как двугранный угол (измеренный в радианах) между двумя плоскостями, их содержащими. Например, угол между экватором и любым меридианом равен $\pi/2$. Расстояние между двумя точками A и B определяется как мера (в радианах) угла AOB . Таким образом, расстояние между северным и южным полюсами равно π , а расстояние между южным полюсом и любой точкой экватора равно $\pi/2$.

Очевидно, группа преобразований $O(3)$ сохраняет расстояния между точками. Можно также показать (доказательство опускаем), что $O(3)$ можно охарактеризовать как группу преобразований сферы, сохраняющих расстояния (понимаемые в сферическом смысле, т.е. как описано выше).

6.3.2. Полюсы, полярные, перпендикуляры, окружности. Посмотрим, что соответствует постулатам Евклида в сферической геометрии.

I_S . Существует единственная прямая, проходящая через две различные точки, кроме случая, когда эти точки противоположны; тогда таких прямых бесконечно много. Примером этой особой ситуации служит совокупность меридианов, соединяющих два полюса.

II_S . Существует единственный перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, кроме случая, когда точка лежит на перпендикуляре, восстановленном из центра сферы O к плоскости, содержащей эту прямую; тогда таких перпендикуляров бесконечно много. Примером этой особой ситуации служит экватор и, скажем, северный полюс: все меридианы проходят через полюс и перпендикулярны экватору.

Более общим образом, полярная точка P — это (сферическая) прямая, полученная пересечением сферы плоскостью, проходящей через O и перпендикулярной к (евклидовой!) прямой PO . Обратно, если дана (сферическая) прямая l , то ее полюсами являются такие две противоположные точки P_l и P'_l , что (евклидова) прямая $P_lP'_l$ перпендикулярна плоскости, в которой лежит l . Утверждению II_S можно теперь придать следующий вид: существует единственный перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, кроме случая, когда точка является полюсом этой прямой; в этом случае все прямые, проходящие через полюс, перпендикулярны данной прямой.

III_S . Существует единственная окружность с данным центром C и данным радиусом ρ , если $0 < \rho < \pi$. Она определяется как множество всех точек, (сферическое) расстояние от которых до C равно ρ . Легко видеть, что любая (сферическая) окружность — на самом деле евклидова окружность на сфере, лежащая в плоскости, перпендикулярной к евклидовой прямой OC и проходящей через точку I этой

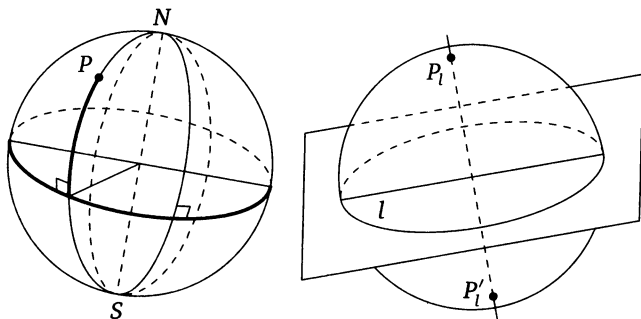


Рис. 6.1. Перпендикуляры, полюсы и полярные

прямой, для которой $OI = \cos \rho$. Отметим, что радиус евклидовой окружности будет меньше чем ρ .

Пусть дана сферическая окружность с центром C и радиусом ρ . Заметим, что ее можно рассматривать как окружность радиуса $\pi - \rho$ с центром C' , где C' — антипод точки C . Заметим далее, что самая длинная окружность с центром C — полярная точки C ; ее радиус равен $\pi/2$.

IV_S. Для каждой точки на прямой и каждого положительного числа существуют ровно две точки на этой прямой, расстояния от которых до данной точки равны данному числу, если только это число меньше π .

V_S. Любые две прямые пересекаются в двух противоположных (антиподальных, диаметрально противоположных) точках, т.е. в двух точках, симметричных относительно центра сферы S^2 . Следовательно, в сферической геометрии не существует параллельных прямых. Если две точки A, B не противоположны, то существует лишь одна прямая, соединяющая их, а на этой прямой — единственный кратчайший отрезок с концами в A и B . Противоположные точки соединены бесконечным множеством прямых (в случае северного и южного полюсов это меридианы).

6.3.3. Прямые как кратчайшие пути. В курсах дифференциальной геометрии доказывается, что сферические прямые являются геодезическими, т.е. кратчайшими путями между двумя точками. При этом длина кривой определяется как криволинейный интеграл, а затем с помощью вариационного исчисления доказывается, что кривая минимальной длины (на сфере), соединяющая две точки, в действительности является дугой большой окружности, проходящей через них.

§6.4. Двуугольники и треугольники на сфере

6.4.1. Двуугольники. Две сферические прямые l и m пересекаются в двух (противоположных) точках P и P' и делят сферу на четыре области, которые называются *двуугольниками*. Каждый из них ограничен двумя «половинками» прямых l и m , которые называются его *сторонами*, и имеет две *вершины* (точки P и P'). Четыре области составляют две пары конгруэнтных; два конгруэнтных двуугольника из одной пары касаются друг друга в общих вершинах P и P' , и их углы при этих вершинах равны. Главным параметром двуугольника является мера α угла между определяющими его прямыми; если

$\alpha \neq \pi/2$, то два двуугольника, не конгруэнтные данному, называются *дополнительными к нему*, их угол равен $\pi - \alpha$. Отметим, что угловая мера α задает соответствующий двуугольник с точностью до изометрии сферы.

6.4.2. Площади фигур на сфере. Чтобы корректно описать измерение площадей фигур на плоскости, сфере и других поверхностях, нужно определить, что такое площадь и какие фигуры измеримы (т. е. имеют площадь). Для развития теории необходимо разработать методы для вычисления площади. В случае евклидовой плоскости есть несколько подходов к понятию плоскости: многие читатели, вероятно, слышали о теории *меры Жордана*; более продвинутые, возможно, изучали *меру Лебега*; те, кто прослушал курс анализа функций многих переменных, знают, что площади можно вычислять с помощью *двойных интегралов*.

В этой книге мы не будем строить строгую теорию меры для изучаемых геометрий. В данном пункте мы лишь дадим набросок аксиоматического подхода к определению площадей сферических фигур; он аналогичен теории меры Лебега на евклидовой плоскости. Согласно такому подходу имеется семейство множеств на S^2 , называемых *измеримыми*, причем выполнены следующие аксиомы.

(i) *Инвариантность*. Две конгруэнтные измеримые фигуры имеют равные площади.

ii) *Нормировка*. Вся сфера измерима и имеет площадь 4π .

(iii) *Счетная аддитивность*. Если измеримая фигура F является объединением счетного семейства измеримых фигур $\{F_i\}$ без общих внутренних точек, ее площадь равна сумме площадей фигур F_i .

Из этих аксиом очевидно следует, что площадь северной полушеры равна 2π , а каждый из четырех равных треугольников, на которые можно ее разделить, имеет площадь $\pi/2$.

6.4.3. Площадь двуугольника. Из аксиом, сформулированных в предыдущем пункте, легко вывести, что площадь $S_{\pi/2}$ двуугольника с угловой мерой $\pi/2$ равна π . Действительно, сфера покрывается четырьмя такими неперекрывающимися двуугольниками, конгруэнтными друг другу; они имеют равную площадь согласно аксиоме (i), сумма их площадей есть площадь сферы согласно аксиоме (iii), а последняя равна 4π согласно аксиоме (ii), откуда следует, что

$$S_{\pi/2} = (4\pi)/4 = \pi.$$

В случае, когда угловая мера α двуугольника равна числу π , умноженному на рациональное число, аналогично получаем

$$S_\alpha = 2\alpha. \quad (6.1)$$

В действительности эта формула верна для любого α , но если π/α иррационально, то ее доказательство требует перехода к пределу. Поэтому мы опустим доказательство, но в дальнейшем будем использовать вышеприведенную формулу при всех значениях α .

6.4.4. Площадь треугольника. Пусть A, B, C — три различные точки сферы S^2 , причем никакие две из них не противоположны. Объединение кратчайших прямолинейных отрезков, соединяющих точки A и B , B и C , C и A , называется *треугольником* ABC . В треугольнике ABC мы всегда обозначаем через α, β, γ меру углов при A, B, C соответственно, а через a, b, c — длины сторон, противолежащих вершинам A, B, C (напомним, что длина a стороны BC равна мере угла BOC в пространстве \mathbb{R}^3).

Теорема 6.4.5. *Площадь S_{ABC} сферического треугольника с углами α, β, γ равна*

$$S_{ABC} = \alpha + \beta + \gamma - \pi.$$

Доказательство. Имеется 12 сферических двуугольников, образованных парами прямых AB, BC, CA . Выберем из них шесть, а именно те, которые содержат либо треугольник ABC , либо противоположный ему треугольник $A'B'C'$, образованный тремя точками, противоположными точкам A, B, C . Обозначим площади выбранных двуугольников через $S_I, S'_I, S_{II}, S'_{II}, S_{III}, S'_{III}$. Каждая точка треугольников ABC и $A'B'C'$ покрыта в точности тремя из шести выбранных двуугольников, а каждая из остальных точек сферы покрыта ровно одним таким двуугольником (не считая точек на прямых). С учетом соотношения (6.1) можно записать

$$\begin{aligned} 4\pi &= S_I + S'_I + S_{II} + S'_{II} + S_{III} + S'_{III} - 2S_{ABC} - 2S_{A'B'C'} = \\ &= 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma - 2S_{ABC} - 2S_{A_1B_1C_1} = \\ &= 4(\alpha + \beta + \gamma) - 4S_{ABC}, \end{aligned}$$

поскольку треугольники ABC и $A'B'C'$ имеют равную площадь (как конгруэнтные). Из полученной формулы следует искомое равенство. \square

Из этой теоремы вытекает важное следствие.

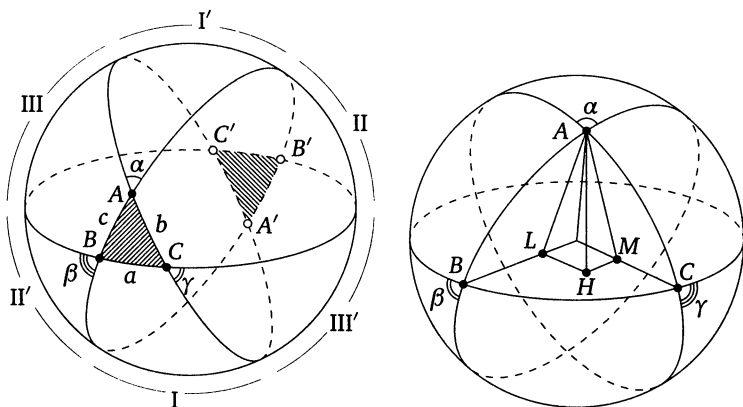


Рис. 6.2. Площадь треугольника и теорема синусов

Следствие 6.4.6. Сумма углов любого треугольника больше чем π . Теорема синусов для евклидовых треугольников имеет следующий аналог в случае сферических треугольников.

Теорема 6.4.7 (сферическая теорема синусов).

$$\frac{\sin a}{\sin \alpha} = \frac{\sin b}{\sin \beta} = \frac{\sin c}{\sin \gamma}.$$

Чтобы доказать эту формулу, потребуется следующее утверждение, которое иногда называют «теоремой о трех перпендикулярах».

Лемма 6.4.8. Пусть $A \in \mathbb{R}^3$ — точка вне плоскости \mathcal{P} , точка K — ее ортогональная проекция на \mathcal{P} , а L — ее ортогональная проекция на прямую l , лежащую в плоскости \mathcal{P} . Тогда KL и l перпендикулярны.

Доказательство. Прямая l перпендикулярна плоскости AKL , поскольку она перпендикулярна двум непараллельным прямым в этой плоскости, а именно AL и AK (последней прямой — поскольку прямая AK перпендикулярна любой прямой в плоскости \mathcal{P}). Следовательно, l перпендикулярна любой прямой в плоскости AKL , в частности прямой LK . \square

Доказательство теоремы. Пусть H — проекция точки A на плоскость ABC , а L и M — ее проекции на прямые OB и OC . Тогда согласно лемме L и M совпадают с проекциями точки H на OB и OC . Поэтому

$$|AH| = |AL| \sin \beta = \sin c \sin \beta, \quad |AH| = |MA| \sin \gamma = \sin b \sin \gamma.$$

Значит,

$$\sin b : \sin \beta = \sin c : \sin \gamma.$$

Аналогично, проектируя C на плоскость AOB и рассуждая, как выше, получаем $\sin b : \sin \beta = \sin a : \sin \alpha$. Отсюда непосредственно вытекает искомое равенство. \square

§ 6.5. Другие теоремы о треугольниках

В этом параграфе мы сформулируем еще несколько теорем о сферических треугольниках. Их доказательства составляют предмет задач в конце главы.

Теорема 6.5.1 (первая теорема косинусов).

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha.$$

Теорема 6.5.2 (вторая теорема косинусов).

$$\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \sin \beta \sin \gamma \cos c.$$

Следствие 6.5.3 (аналог теоремы Пифагора). Если в треугольнике ABC угол при вершине C прямой, то

$$\cos c = \cos a \cos b.$$

Теорема 6.5.4. Медианы любого треугольника пересекаются в одной точке.

Теорема 6.5.5. Высоты любого треугольника пересекаются в одной точке.

§ 6.6. Треугольники Кокстера на сфере S^2

Мы не будем строить в полной общности теорию замощений сферы S^2 и геометрию Кокстера на сфере, но лишь рассмотрим *треугольники Кокстера*, т. е. сферические треугольники, все углы которых имеют вид π/m , $m = 2, 3, \dots$ Из теоремы 6.4.5 сразу вытекает, что если N экземпляров сферического треугольника Кокстера $(\pi/p, \pi/q, \pi/r)$ покрывают сферу, то число N удовлетворяет диофантовому уравнению

$$\frac{N}{p} + \frac{N}{q} + \frac{N}{r} = N + 4.$$

Группа преобразований соответствующей геометрии Кокстера конечна, так что теорема 3.2.6 определяет возможный вид этой группы: это либо одна из групп диэдра, либо группа тетраэдра, куба или

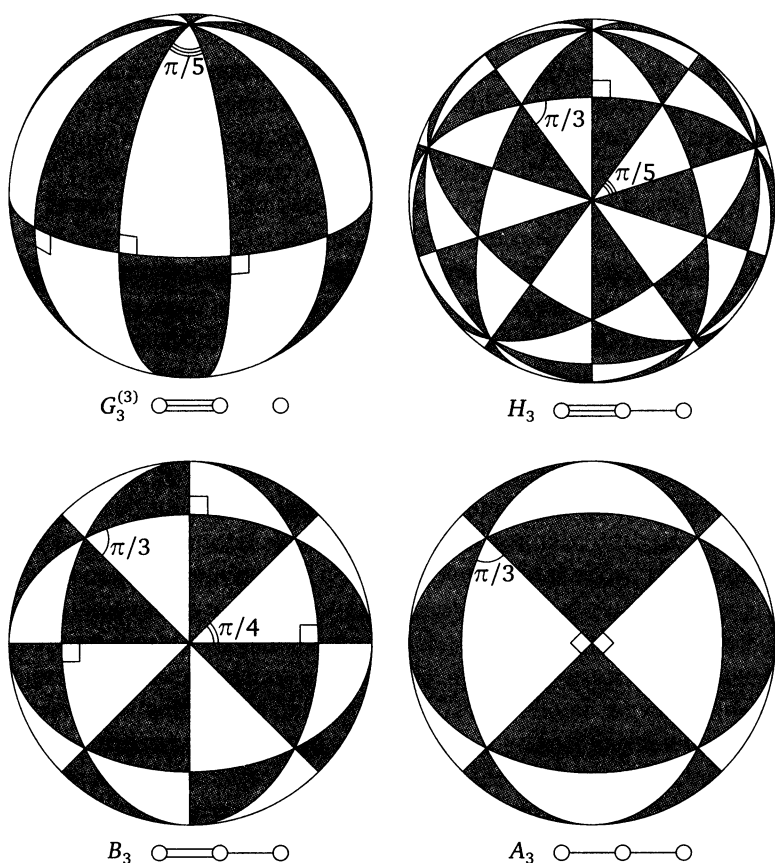


Рис. 6.3. Четыре замощения Кокстера на сфере

додекаэдра. Группы диэдра дают очевидную бесконечную серию замощений, одно из которых показано на рис. 6.3.

Три другие группы дают три возможных значения N :

$$N = 24, 48, 120,$$

и в каждом случае легко найти соответствующие значения (p, q, r) . В итоге получаем все решения нашего диофантова уравнения:

$$(2, 3, 3), (2, 3, 4), (2, 3, 5), (2, 2, n) \quad \text{для } n = 2, 3, \dots$$

Соответствующие замощения сферы (и их схемы Кокстера) показаны на рис. 6.3.

§ 6.7. Двумерная эллиптическая геометрия

6.7.1. Сферическая геометрия тесно связана с *эллиптической геометрией*, созданной Риманом. Эллиптическая геометрия получается из сферической «отождествлением противоположных точек сферы S^2 ». Точное определение можно сформулировать так. Рассмотрим множество $\mathbb{E}l^2$, состоящее из пар противоположных точек $(x, -x)$ на единичной сфере $S^2 \subset \mathbb{R}^3$. Группа $O(3)$ действует на этом множестве (поскольку изометрии сферы переводят пары противоположных точек в такие же пары) и тем самым определяет геометрию в смысле Клейна $(\mathbb{E}l^2 : O(3))$, которую мы называем *двумерной эллиптической геометрией*.

Прямые в эллиптической геометрии определяются как большие окружности на сфере S^2 , углы и расстояния — как в сферической геометрии, тригонометрия также не отличается от случая сферической геометрии. Вообще можно сказать, что эллиптическая геометрия локально совпадает со сферической, но эти геометрии резко различаются глобально. В частности, в эллиптической геометрии:

- через любые две различные точки проходит ровно одна прямая;
- для данной прямой и любой данной точки (кроме одной, которая называется полюсом этой прямой) существует единственный перпендикуляр к этой прямой, проходящий через данную точку.

Соотношение между двумя геометриями лучше всего выражено следующим утверждением, из которого вытекают простые доказательства предыдущих фактов эллиптической геометрии.

Теорема 6.7.2. *Существует сюръективный морфизм*

$$D: (S^2 : O(3)) \rightarrow (\mathbb{E}l^2 : O(3))$$

сферической геометрии на эллиптическую, который является локальным изоморфизмом (в том смысле, что любая область, содержащаяся в какой-либо полусфере, отображается на свой образ биективно и изометрично).

Доказательство. Отображение D очевидно: $D: x \mapsto (x, -x)$, а гомоморфизмом групп преобразований служит тождественное отображение. Отсюда немедленно следуют все утверждения теоремы. \square

Как отмечено выше, глобально обе геометрии очень различны. Будучи метрическими пространствами, они являются топологическими пространствами (в метрической топологии), которые даже не гомеоморфны: одно из них — двусторонняя поверхность (S^2) , другое $(\mathbb{R}P^2)$ — односторонняя (она содержит ленту Мёбиуса).

§ 6.8. Задачи

Во всех задачах этой главы a, b, c — стороны, α, β, γ — противолежащие им углы сферического треугольника. Радиус сферы равен $R = 1$.

6.1. Докажите первую теорему косинусов для сферы S^2 : $\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos \alpha$.

6.2. Докажите вторую теорему косинусов для сферы S^2 : $\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma = \sin \beta \sin \gamma \cos a$.

6.3. Докажите, что $a + b + c < 2\pi$.

6.4. Верна ли в сферической геометрии теорема Пифагора? Докажите аналог этой теоремы, сформулированный в следствии 6.5.3.

6.5. Считая, что самолет летит по кратчайшему пути, выясните, проходит ли авиалиния Москва — Нью-Йорк над Испанией? А над Гренландией? Проверьте свой ответ, натянув на глобус тонкую веревочку между Москвой и Нью-Йорком.

6.6. Найдите инфимум и супремум суммы углов равностороннего треугольника на сфере.

6.7. Город A расположен на расстоянии 1000 км от городов B и C , траектории авиарейсов из A в B и из A в C взаимно перпендикулярны. Оцените расстояние между B и C . (Радиус Земли можно считать равным 6400 км.)

6.8*. Найдите площадь сферического диска радиуса r (т. е. области, которая ограничена сферической окружностью радиуса r).

6.9. Найдите фундаментальные области для действия групп изометрий тетраэдра, куба, додекаэдра и икосаэдра на двумерной сфере и определите количество образов фундаментальной области при соответствующем действии.

6.10. Докажите, что любой сферический треугольник имеет описанную и вписанную окружности.

6.11. Докажите, что медианы сферического треугольника пересекаются в одной точке.

6.12. Докажите, что высоты сферического треугольника всегда пересекаются в одной точке.

6.13. Пусть медианы и высоты сферического треугольника пересекаются в точках M и A соответственно. Может ли оказаться, что $M = A$?

Глава 7

Модель Пуанкаре гиперболической геометрии на круге

В этой главе мы приступаем к изучению самой известной из неевклидовых геометрий — гиперболической геометрии (которую по русски чаще называют геометрией Лобачевского), сосредоточившись на случае размерности два. Избегая сложностей аксиоматического подхода, мы в этой главе изложим гиперболическую планиметрию, используя замечательную модель Пуанкаре на круге. Это геометрия в смысле Клейна, заданная действием некоторой группы преобразований на круге (а именно группы, порожденной отражениями от окружностей, ортогональных границе круга).

Чтобы описать эту модель, требуются некоторые факты из евклидовой планиметрии, которые, к сожалению, обычно не изучают в школе. Поэтому вначале напомним некоторые свойства инверсии (которая будет главной составляющей в рассматриваемой группе преобразований) и некоторые конструкции, связанные с ортогональными окружностями на евклидовой плоскости. Затем мы установим основные факты гиперболической планиметрии и наконец обратимся к физическому миру, следуя рассуждениям Пуанкаре из его книги «Наука и гипотеза» [9] об эпистемологических вопросах, связанных с этой и другими геометриями.

§ 7.1. Инверсия и ортогональные окружности

7.1.1. Инверсия и ее свойства. Главным инструментом, нужным в этой главе, является инверсия — классическое преобразование из элементарной планиметрии. Обозначим через \mathcal{R} плоскость \mathbb{R}^2 с добавленной точкой (которая называется *бесконечно удаленной точкой* и обозначается через ∞). Множество $\mathcal{R} := \mathbb{R}^2 \cup \infty$ можно также интерпретировать как комплексную плоскость \mathbb{C} с добавленной «бесконечно удаленной точкой»; тогда оно называется *римановой сферой* и обозначается $\bar{\mathbb{C}}$.

Инверсией с центром $O \in \mathbb{R}^2$ и радиусом $r > 0$ называется преобразование плоскости, отображающее каждую точку M в точку N на

луче $|O, M\rangle$, для которой выполнено равенство

$$|OM| \cdot |ON| = r^2, \quad (7.1)$$

а также меняющее местами точки O и ∞ . Иногда инверсию называют *отражением относительно окружности инверсии*, т. е. окружности радиуса r с центром O .

Чтобы построить образ точки M при инверсии с центром O и радиусом r , есть простой геометрический способ: надо начертить окружность инверсии, восстановить из точки M перпендикуляр к OM до пересечения с окружностью в точке T , а затем провести касательную к окружности в этой точке до пересечения с лучом $[O, M\rangle$ в точке N ; тогда N будет образом точки M при данной инверсии (см. рис. 7.1). Действительно, прямоугольные треугольники OMT и OTN подобны (они имеют общий острый угол при вершине O), и потому

$$\frac{|OM|}{|OT|} = \frac{|OT|}{|ON|},$$

откуда ввиду равенства $|OT| = r$ получаем соотношение (7.1).

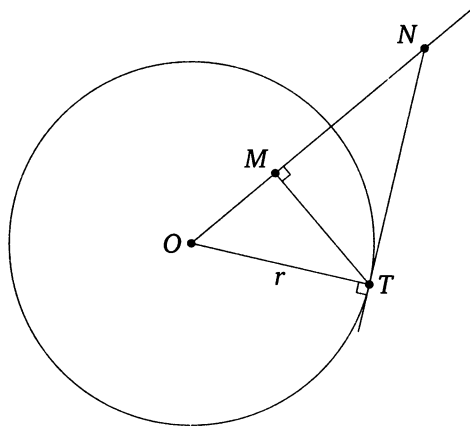


Рис. 7.1. Инверсия $|OM| \cdot |ON| = r^2$

Если пополненная плоскость \mathcal{R} интерпретируется как риманова сфера $\bar{\mathbb{C}}$, то примером инверсии (с центром O и радиусом 1) служит отображение $z \mapsto 1/\bar{z}$, где черта над z обозначает комплексное сопряжение.

Из определения непосредственно следует, что инверсии — это биекции комплексной плоскости $\mathcal{R} = \bar{\mathbb{C}}$, которые оставляют на ме-

сте точки окружности инверсии, «выворачивают круг наизнанку» (точки, которые были внутри окружности, оказываются снаружи, и наоборот) и являются *инволюциями* (т.е. композиция инверсии с собой — тождественное отображение). Кроме того, инверсии обладают следующими важными свойствами.

(i) *Инверсии отображают любую окружность или прямую в окружность или прямую.* В частности, прямые, проходящие через центр инверсии, отображаются в себя (но «выворачиваются наизнанку» в том смысле, что O переходит в ∞ и обратно, а часть прямой, расположенная внутри окружности, оказывается снаружи и обратно); окружности, проходящие через центр инверсии, переходят в прямые, а прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, проходящие через него (см. рис. 7.2).

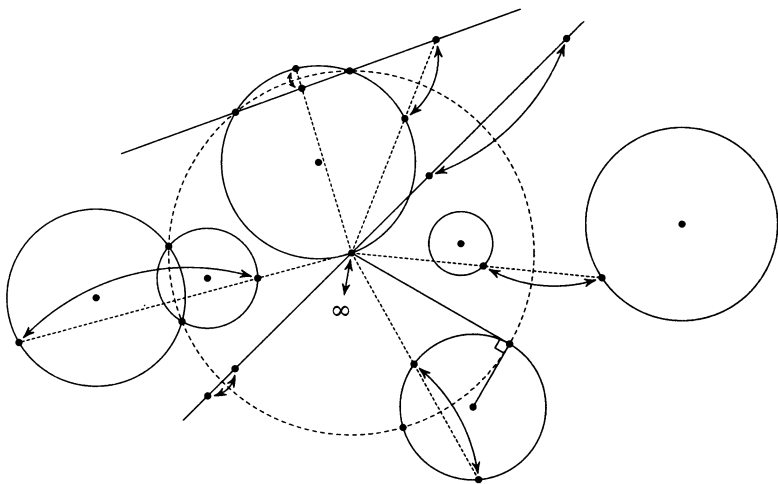


Рис. 7.2. Образы окружностей и прямых при инверсии

Из определения ортогональности следует, что касательная из центра O окружности \mathcal{C}_O к другой окружности \mathcal{C}_I проходит через точку пересечения T этих окружностей. Теперь рассмотрим инверсию с центром O и радиусом $r = |OT|$. Согласно свойству (iii) она переводит окружность \mathcal{C}_I в себя; в частности, точка M отображается в N , точка T (как и другая точка пересечения окружностей) остается на месте, а две дуги окружности \mathcal{C}_I , которые высекает \mathcal{C}_O , меняются местами. Далее заметим, что и обратно, инверсия относительно окружности \mathcal{C}_I преобразует \mathcal{C}_O аналогичным образом.

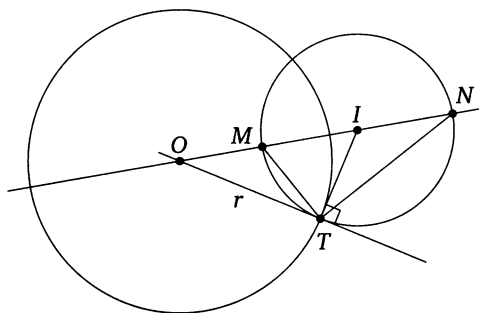


Рис. 7.3. Ортогональные окружности

(ii) Инверсии отображают любую окружность или прямую, ортогональную окружности инверсии, в себя. См. рис. 7.3, где показаны две ортогональные окружности \mathcal{C}_0 и \mathcal{C}_I с центрами O и I соответственно.

(iii) *Инверсии сохраняют меру углов*; здесь под мерой углов, образованных двумя пересекающимися кривыми, понимается обычная (евклидова) мера угла между их касательными в точке пересечения.

Элементарные доказательства свойств (i)–(iii) предоставляются читателю (см. задачи 7.1–7.3).

7.1.2. Построение ортогональных окружностей. Мы уже отметили важную роль, которую играют при инверсии ортогональные окружности (см. свойство (i) из п. 7.1.1). Теперь опишем несколько способов их построения, которые будут использоваться в дальнейшем.

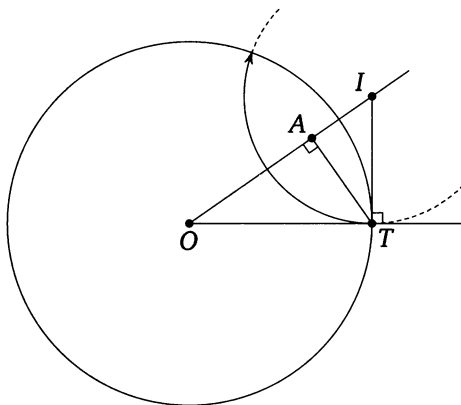


Рис. 7.4. Инверсия, переводящая произвольную точку A в O

Лемма 7.1.3. Пусть точка A лежит внутри окружности \mathcal{C} с центром в точке O ; тогда существует окружность, ортогональная \mathcal{C} , отражение от которой отображает A в O .

Доказательство. Восставим перпендикуляр из A к прямой OA до пересечения в точке T с окружностью \mathcal{C} (см. рис. 7.4).

Проведем касательную к \mathcal{C} в точке T до пересечения с OA в точке I . Тогда для нашей цели подойдет окружность радиуса IT с центром I . В самом деле, подобные прямоугольные треугольники IAT и ITO удовлетворяют соотношению $|IA|/|IT| = |IT|/|IO|$, откуда следует, что $|IA| \cdot |IO| = |IT|^2$, а это означает, что O получается из A при отражении от окружности радиуса $|IT|$ с центром I , что и требовалось. \square

Следствие 7.1.4. (i) Пусть A и B — точки внутри окружности \mathcal{C}_0 , не лежащие на одном и том же диаметре; тогда через A и B проходит ровно одна окружность, ортогональная к \mathcal{C}_0 .

(ii) Пусть A — точка внутри окружности \mathcal{C}_0 , а P — точка на этой окружности, не лежащая на том же диаметре, что и A ; тогда через A и P проходит ровно одна окружность, ортогональная к \mathcal{C}_0 .

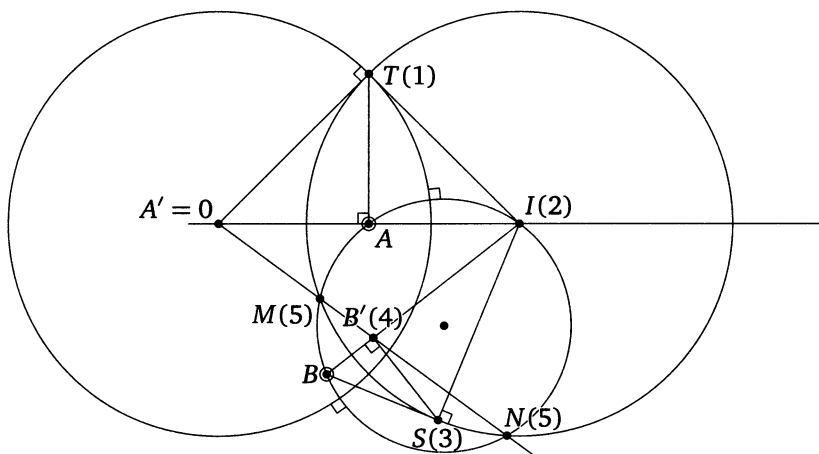
(iii) Пусть P и Q — точки на окружности \mathcal{C}_0 с центром O , причем PQ не является диаметром; тогда существует единственная окружность \mathcal{C} , ортогональная к \mathcal{C}_0 и проходящая через P и Q .

(iv) Пусть A — точка внутри окружности \mathcal{C}_0 с центром O , а \mathcal{D} — окружность, ортогональная к \mathcal{C}_0 ; тогда существует единственная окружность \mathcal{C} , ортогональная обеим окружностям \mathcal{C}_0 и \mathcal{D} и проходящая через A .

Доказательство. Утверждение (i) доказывается явным пошаговым построением нужной окружности с помощью циркуля и линейки. Построение показано на рис. 7.5; числа в скобках около каждой точки показывают, на каком шаге точка получена.

Вначале применим лемму 7.1.3, чтобы найти инверсию φ , переводящую A в центр O данной окружности; а именно восставим из A перпендикуляр к OA до пересечения с \mathcal{C} в точке T (1), затем проведем из T перпендикуляр к OT до пересечения I (2) с OA ; искомая инверсия имеет центр I и радиус $|IT|$. Соединив B с I , построим касательную BS (3) к окружности инверсии φ и найдем образ B' (4) точки B при инверсии φ , опустив перпендикуляр из S на IB .

Затем проведем прямую $B'O$ и найдем точки ее пересечения M, N с окружностью инверсии φ . Наконец, проведем окружность \mathcal{C} , проходящую через точки M, N, I . Эта окружность чудесным образом проходит через A и B и ортогональна окружности \mathcal{C}_0 ! Разуме-

Рис. 7.5. Окружность, ортогональная к \mathcal{C}_0 и содержащая A, B

ется, в этом нет никакого чуда: окружность \mathcal{C} проходит через A и B , поскольку является прообразом прямой OB' при инверсии φ (см. п. 7.1.1, свойство (i)), а ортогональна окружности \mathcal{C}_0 она потому, что это верно для OB' (см. п. 7.1.1, свойство (ii)).

Единственность очевидна в случае $A = O$, а в общем случае вытекает из свойств (i)–(ii) из п. 7.1.1.

Утверждение (ii) доказывается аналогично: отобразим A в O посредством инверсии φ , соединим O и $\varphi(P)$ и далее рассуждаем, как выше.

Чтобы доказать утверждение (iii), проведем прямые OP и OQ , восставим к ним перпендикуляры из P и Q соответственно и обозначим через I их точку пересечения. Тогда окружность радиуса $|IP|$ с центром I искомая. Ее единственность легко доказывается от противного.

Чтобы доказать утверждение (iv), снова применим лемму 7.1.3 и построим инверсию φ , которая переводит \mathcal{C}_0 в себя, а точку A в O . Из точки O проведем (единственный) луч \mathcal{R} , ортогональный к $\varphi(\mathcal{L})$. Тогда окружность $\varphi^{-1}(\mathcal{R})$ искомая. \square

§ 7.2. Построение модели на круге

7.2.1. Модель на круге *гиперболической геометрии* — это геометрия $(\mathbb{L}^2: \mathcal{M})$, точки которой — точки открытого круга

$$\mathbb{L}^2 := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2: x^2 + y^2 < 1\},$$

а группа преобразований \mathcal{M} порождена отражениями от всех окружностей, ортогональных граничной окружности

$$\mathbb{A} := \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$$

круга \mathbb{L}^2 , и отражениями от всех диаметров окружности \mathbb{A} . Группа \mathcal{M} действительно является группой преобразований круга \mathbb{L}^2 : из сказанного в п. 7.1.1 вытекает, что указанные отражения переводят круг в себя, а так как отражения обратны себе, выполнена импликация $\varphi \in \mathcal{M} \Rightarrow \varphi^{-1} \in \mathcal{M}$.

Мы часто будем называть \mathbb{L}^2 *гиперболической плоскостью* или *плоскостью Лобачевского*. Граничная окружность \mathbb{A} (которая не является частью гиперболической плоскости) называется *абсолютом*.

7.2.2. Позже мы увидим, что \mathcal{M} в действительности является группой изометрий гиперболической геометрии относительно *гиперболического расстояния*, которое будет определено в следующей главе. Мы увидим, что, хотя евклидово расстояние между точками круга \mathbb{L}^2 всегда меньше двух, по отношению к гиперболическому расстоянию гиперболическая плоскость неограниченна. Концы короткого (в евклидовом смысле!) отрезка вблизи абсолюта весьма удалены друг от друга в смысле гиперболического расстояния.

Рисунок 7.6 дает представление о том, что происходит при изометрическом преобразовании (простейшем, а именно отражении от прямой). Отметим, что с нашей евклидовой точки зрения отражение меняет размеры и формы на картинке, тогда как с гиперболической точки зрения размеры и форма образа такие же, как у оригинала. Из рисунка ясно также, что *гиперболические отражения меняют ориентацию*.

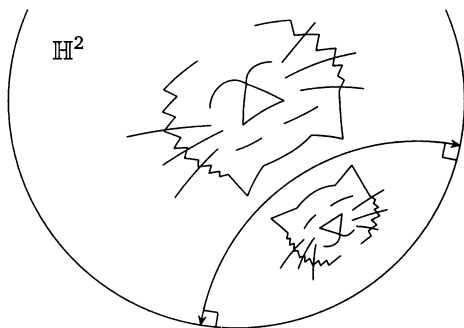


Рис. 7.6. Изометрия гиперболической плоскости

§ 7.3. Точки и прямые на плоскости Лобачевского

7.3.1. Прежде всего определим *точки на гиперболической плоскости*: это просто точки открытого круга \mathbb{L}^2 . Определим теперь *прямые* на гиперболической плоскости как пересечения круга \mathbb{L}^2 с (евклидовыми) окружностями, ортогональными абсолюту, а также с диаметрами абсолюта (без концевых точек), см. рис. 7.7.

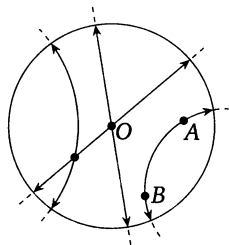


Рис. 7.7. Прямые на плоскости Лобачевского

Отметим, что концы дуг и диаметров не принадлежат гиперболической плоскости: они лежат на абсолюте, точки которого не принадлежат нашей геометрии. Рисунок 7.7 показывает, что некоторые прямые пересекаются в одной точке, другие не имеют общих точек и никакие две не имеют двух общих точек (в отличие от прямых в сферической геометрии). Это не удивительно, поскольку справедлива следующая теорема.

Теорема 7.3.2. *Через любую пару различных точек гиперболической плоскости проходит одна и только одна прямая.*

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из следствия 7.1.4, п. (i). \square

§ 7.4. Перпендикуляры

7.4.1. Две прямые на гиперболической плоскости называются *перпендикулярными*, если они ортогональны в смысле элементарной евклидовой геометрии. Если они обе — диаметры абсолюта, то они перпендикулярны в обычном смысле. Если они обе — дуги окружностей, то касательные к ним в точке пересечения перпендикулярны. Если же одна из них — дуга, а другая — диаметр, то диаметр перпендикулярен касательной к дуге в точке пересечения.

Теорема 7.4.2. *Существует ровно одна прямая, проходящая через данную точку и перпендикулярная данной прямой.*

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из следствия 7.1.4, п. (iv). \square

§ 7.5. Параллельные и расходящиеся прямые

7.5.1. Пусть l — прямая, а P — точка гиперболической плоскости \mathbb{L}^2 , не принадлежащая этой прямой. Обозначим через A и B

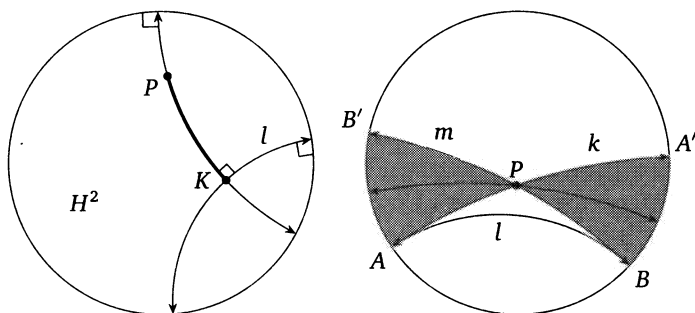


Рис. 7.8. Перпендикулярные и параллельные прямые

точки, в которых l пересекает абсолют. Рассмотрим прямые $k = PA$ и $m = PB$, и пусть A' и B' — вторые точки их пересечения с абсолютом. Ясно, что прямые k и m не пересекают l . Более того, l не пересекается с любой прямой, проходящей через P между k и m (т. е. содержащей P и соединяющей дуги AA' и BB'). Прямые APA' и BPB' называются *параллельными* прямой l , а прямые между ними — *расходящимися* с l .

Мы доказали следующее утверждение.

Теорема 7.5.2. *Если точка P не принадлежит прямой l , то существует бесконечно много прямых, проходящих через P и не пересекающих l . Все эти прямые расположены между двумя прямыми, параллельными прямой l .*

Эта теорема противоречит знаменитому пятому постулату Евклида, который в современной формулировке утверждает, что через данную точку проходит ровно одна прямая, параллельная данной прямой. На протяжении двух с лишним тысяч лет математики и философы предприняли множество попыток вывести пятый постулат из других постулатов Евклида (простых и интуитивно очевидных, в отличие от пятого постулата). Если бы такое доказательство было найдено, евклидову геометрию можно было бы объявить абсолютной истиной и с физической, и с философской точки зрения. Она стала бы одним из фактов, которые немецкий философ Кант включил в категорию *априорных синтетических*. В течение двух тысяч лет наивная вера ученых в абсолютную истинность евклидовой геометрии мешала потенциальным создателям других геометрий осознать, что они нашли нечто ценное. Поэтому появление непротиворечивой геометрии, в которой не выполнен пятый постулат, было

не только принципиальным достижением в истории математики, но и одним из поворотных пунктов в философии науки. Подробнее об этом см. главу 11.

§ 7.6. Сумма углов треугольника

7.6.1. Рассмотрим три точки A, B, C , не лежащие на одной прямой. Три отрезка $[A, B]$, $[B, C]$, $[C, A]$ (называемые *сторонами*) образуют *треугольник* с вершинами A, B, C . Углы треугольника (измеренные в радианах) считаются равными углам (в евклидовой мере) между касательными к сторонам в вершинах.

Теорема 7.6.2. Сумма углов α, β, γ треугольника ABC меньше двух прямых углов:

$$\alpha + \beta + \gamma < \pi.$$

Доказательство. Ввиду леммы 7.1.3 можно без потери общности считать, что A совпадает с O (центром круга \mathbb{L}^2). Но если теперь сравнить гиперболический треугольник OBC с евклидовым треугольником OBC , то мы видим, что их угол при вершине O одинаков, но евклидовы углы при B и C больше, чем их гиперболические двойники (см. рис. 7.9), откуда следует утверждение теоремы. \square

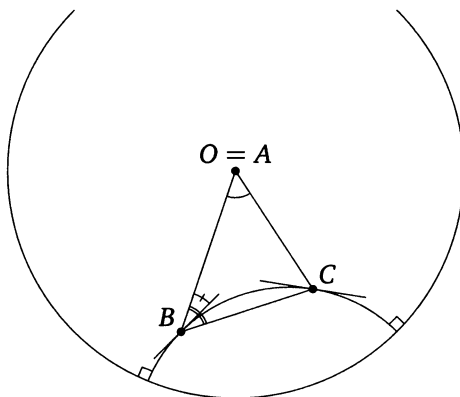


Рис. 7.9. Сумма углов гиперболического треугольника

Легко видеть, что у очень маленьких треугольников сумма углов очень близка к π , и на самом деле *точная верхняя грань сумм углов гиперболических треугольников равна π* . При этом *точная нижняя грань этих сумм равна 0*. Чтобы убедиться в этом, разделим абсолют

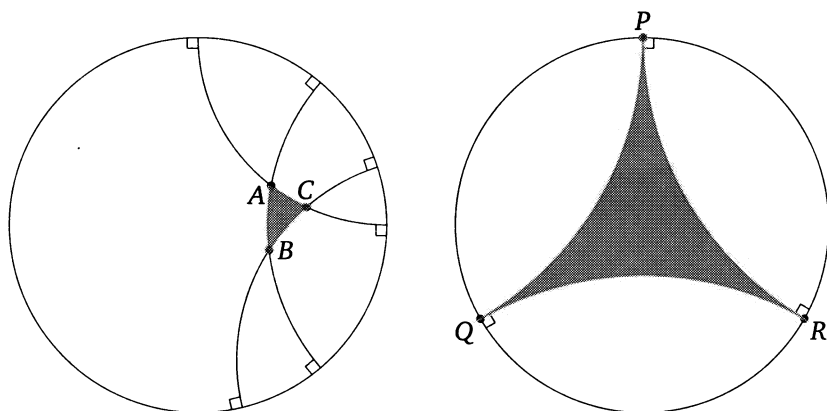


Рис. 7.10. Обыкновенный треугольник и «треугольник» с суммой углов, равной 0

на три равные части точками P, Q, R и построим три окружности, ортогональные абсолюту и проходящие через пары точек P и Q , Q и R , R и P соответственно (см. рис. 7.10). Такие окружности существуют согласно следствию 7.1.4, п. (iii). Тогда все углы «треугольника» PQR равны нулю, поэтому и их сумма равна нулю. Разумеется, на самом деле PQR не является треугольником в нашей геометрии (его вершины, находясь на абсолюте, не являются точками круга \mathbb{L}^2), но если взять три точки P', Q', R' , достаточно близкие к P, Q, R , то сумму углов треугольника $P'Q'R'$ можно сделать меньше любого заданного $\varepsilon > 0$.

§ 7.7. Повороты и окружности на гиперболической плоскости

Выше мы упомянули, что расстояние между точками гиперболической плоскости будет определено позже. Напомним, что гиперболическая плоскость — это геометрия $(\mathbb{L}^2 : \mathcal{M})$, где по определению \mathcal{M} — группа преобразований, порожденная всеми отражениями от всех гиперболических прямых. Если взять композицию двух отражений от пересекающихся прямых, то результат должен быть «поворотом», но сейчас мы не можем это сформулировать, так как не имеем определения поворота: нельзя дать обычное (евклидово) определение поворота или хотя бы окружности, пока не введено расстояние.

Однако понятия поворота и окружности все же можно определить, не обращаясь к понятию расстояния, следующим естественным образом: поворот вокруг точки $P \in \mathbb{L}^2$ — это, по определению,

композиция любых двух отражений от прямых, проходящих через P . Если I и A — различные точки из \mathbb{L}^2 , то (гиперболическая) окружность с центром I и радиусом $|IA|$ есть множество образов точки A при всех поворотах вокруг I .

Теорема 7.7.1. (Гиперболическая) окружность в модели Пуанкаре на круге является евклидовой окружностью, и обратно, любая евклидова окружность в \mathbb{L}^2 является гиперболической окружностью в геометрии $(\mathbb{L}^2: \mathcal{M})$.

Доказательство. Пусть \mathcal{C} — окружность с центром I и радиусом IA в геометрии $(\mathbb{L}^2: \mathcal{M})$. Согласно лемме 7.1.3 можно перевести I в центр O круга \mathbb{L}^2 посредством отражения φ . Пусть ρ — поворот вокруг I , заданный прямыми l_1 и l_2 . Тогда прямые $d_1 := \varphi(l_1)$ и $d_2 := \varphi(l_2)$ являются диаметрами абсолюта, а композиция отражений от этих диаметров является евклидовым поворотом вокруг O (и одновременно гиперболическим поворотом). Этот поворот переводит точку $\varphi(A)$ в точку на окружности \mathcal{C}' с центром O и радиусом $O\varphi(A)$, которая является одновременно евклидовой и гиперболической окружностью. По следствию 7.1.4 (п. (i)) ее прообраз $\varphi^{-1}(\mathcal{C}')$ будет (евклидовой!) окружностью. Но $\varphi^{-1}(\mathcal{C}')$ совпадает с \mathcal{C} по построению, так что \mathcal{C} действительно является евклидовой окружностью в нашей модели. \square

Доказательство обратного утверждения аналогично и представляется читателю (см. задачу 7.7).

§ 7.8. Гиперболическая геометрия и физический мир

В своей известной книге «Наука и гипотеза» [9] Анри Пуанкаре описывает физику маленькой «вселенной» и физические теории, которые создавались бы ее обитателями. Пуанкаре рассматривал евклидову вселенную, имеющую вид открытого единичного круга на двумерной плоскости. Температура равна 100° по Фаренгейту в центре круга и линейно убывает до абсолютного нуля на его границе. Размеры предметов (в том числе живых существ) пропорциональны температуре.

Как опишет основные физические законы такой вселенной живущее в этом круге маленькое плоское существо, наделенное разумом? Первый его вопрос мог бы оказаться таким: мир конечен или бесконечен? Чтобы ответить на этот вопрос, организуется экспедиция; но при ее приближении к границе круга ноги исследовате-

лей становятся меньше, их шаги короче — они никогда не достигнут границы, так что сделают заключение, что мир бесконечен.

Следующий вопрос может быть таким: меняется ли температура во вселенной? Сконструировав термометр (основанный на разнице коэффициентов расширения различных материалов), ученые перемещают его по вселенной и делают измерения. Однако, поскольку размеры всех предметов одинаково меняются с температурой, термометр повсюду дает одинаковые показания — ученые заключают, что температура постоянна.

Затем ученые могут заняться прямыми линиями, т. е. исследовать, каков кратчайший путь между двумя точками. Они обнаружат, что кратчайший путь есть то, что мы воспринимаем как дугу окружности, содержащей данные две точки и ортогональной к граничной окружности вселенной (так будет потому, что путь по такой окружности приближает исследователя к центру круга и, следовательно, увеличивает длину его шагов). Далее, они найдут, что кратчайший путь единствен, и будут рассматривать такие пути как «прямые линии».

Продолжая развивать геометрию, обитатели маленькой плоской вселенной Пуанкаре решат, что через данную точку проходит более чем одна прямая, параллельная данной, что сумма углов треугольника меньше чем π , и получают другие утверждения гиперболической геометрии.

Итак, они придут к заключению, что живут в бесконечной плоской вселенной с постоянной температурой и что она управляется законами гиперболической геометрии. Но это неверно: их вселенная — конечный круг, ее температура меняется (стремится к нулю при приближении к границе), а соответствующая геометрия евклидова, а не гиперболическая!

Философский вывод из рассуждения Пуанкаре состоит не в агностицизме — он идет глубже. Описанная физическая модель, согласно Пуанкаре, показывает, что не только нельзя установить истину о вселенной, но и вообще нет смысла говорить об «истине» или приближении к истине в науке — в практическом смысле обитатели физической модели Пуанкаре совершенно правы, когда используют гиперболическую геометрию как основу своей физики, поскольку это удобно, и лишь вред принесут поиски какой-либо абстрактной Истины, которая заведомо не имеет практического значения.

Это заключение оспаривалось другими мыслителями, но мы не станем вступать в эту философскую дискуссию.

§ 7.9. Задачи

7.1. Докажите, что инверсия отображает окружности и прямые в окружности или прямые.

7.2. Докажите, что инверсия отображает в себя любую окружность, ортогональную окружности инверсии.

7.3. Докажите, что инверсия конформна (т. е. сохраняет угловую меру).

7.4. Докажите, что если точка P лежит вне окружности γ , а A , B — точки пересечения этой окружности с прямой l , проходящей через P , то произведение $|PA| \cdot |PB|$ (которое называется *степенью точки P относительно γ*) не зависит от выбора прямой l .

7.5. Докажите, что если точка P лежит внутри окружности γ , а A , B — точки пересечения этой окружности с прямой l , проходящей через P , то произведение $|PA| \cdot |PB|$ (которое тоже называется *степенью точки P относительно γ*) не зависит от выбора прямой l .

7.6. Докажите, что инверсия относительно окружности, ортогональной данной окружности \mathcal{C} , биективно отображает на себя круг, границей которого является \mathcal{C} .

7.7. Докажите, что любая евклидова окружность внутри модели на круге является и гиперболической окружностью. Совпадает ли ее обычный (евклидов) центр с ее «гиперболическим центром»?

7.8. Рассмотрим рис. 7.11. Показаны ли на нем какие-либо замощения круга \mathbb{L}^2 правильными многоугольниками? Сколько у них сторон? Распознали ли вы на этом чертеже геометрию Кокстера

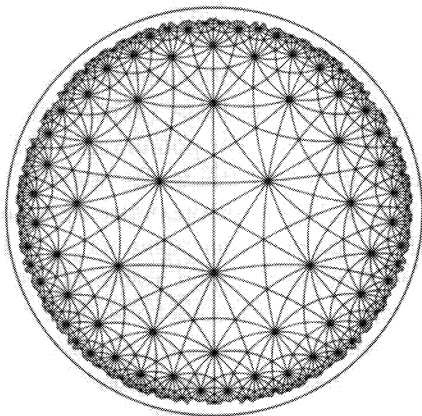


Рис. 7.11. Прямые на гиперболической плоскости

с «гиперболическими треугольниками Кокстера» в качестве фундаментальных областей? Чему равны углы этих треугольников?

7.9. Докажите, что любая инверсия римановой сферы $\bar{\mathbb{C}}$ сохраняет двойное отношение четырех точек:

$$\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}.$$

7.10*. Используя комплексные числа, выведите формулу для расстояния между точками в модели Пуанкаре на круге и докажите, что «симметрия относительно прямых» (т. е. инверсия) сохраняет это расстояние.

7.11. Докажите, что гиперболическая геометрия однородна в том смысле, что для любых двух флагов (т. е. полуплоскостей с отмеченной точкой на границе) существует изометрия, переводящая один флаг в другой.

7.12. Докажите, что гиперболическую плоскость (заданную посредством модели Пуанкаре) можно замостить правильными пятиугольниками.

7.13. Определите инверсию в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 (относительно сферы). Сформулируйте и докажите ее основные свойства: инверсия переводит плоскости и сферы в плоскости или сферы; любую сферу, ортогональную сфере инверсии, — в себя; любую плоскость, проходящую через центр инверсии, — в себя.

7.14. Используя предыдущую задачу, докажите, что любая инверсия в пространстве \mathbb{R}^3 переводит окружности и прямые в окружности или прямые.

7.15. Докажите, что любая инверсия в пространстве \mathbb{R}^3 конформна (сохраняет угловую меру).

7.16. Постройте модель гиперболического трехмерного пространства на открытом единичном шаре (используйте задачу 7.13).

7.17. Докажите, что существует ровно один общий перпендикуляр, соединяющий две непересекающиеся прямые.

7.18. Пусть $A_\infty P$ и $A_\infty P'$ — параллельные прямые (где A_∞ — точка на абсолюте), M — произвольная точка на $A_\infty P$. Будем говорить, что точка $M' \in A_\infty P'$ соответствует точке M , если углы $A_\infty M M'$ и $A_\infty M' M$ равны. Докажите, что любой точке $M \in A_\infty P$ соответствует единственная точка на прямой $A_\infty P'$.

7.19. Геометрическое место всех точек, соответствующих точке M на прямой $A_\infty P$ и лежащих на прямых, параллельных $A_\infty P$, называется *орициклом*. Как выглядят орициклы в модели Пуанкаре?

Глава 8

Модель Пуанкаре на полуплоскости

В этой главе мы рассмотрим другую модель гиперболической плоскости, также принадлежащую Пуанкаре. Эта модель тоже является геометрией в смысле Клейна, и в последующих главах мы узнаем, что на самом деле она изоморфна (как геометрия) модели на круге, рассмотренной в гл. 7.

Точки модели на полуплоскости — это просто комплексные числа с положительной мнимой частью (т. е. лежащие «над» вещественной осью). Такое расположение точек не обладает такой симметрией, как на круге, но модель на полуплоскости имеет то достоинство, что элементы ее группы преобразований (т. е. некоторой подгруппы в группе Мёбиуса дробно-линейных преобразований, определение см. ниже) можно задать простыми явными формулами, причем существует изящная формула для расстояния между двумя точками.

Мы увидим, что группа изометрий относительно такого расстояния является в действительности группой преобразований данной модели, так что эта модель показывает, что гиперболическая геометрия является геометрией в традиционном смысле: ее структура определяется функцией расстояния. Это позволит ввести «гиперболическую тригонометрию» и понять смысл таинственных «абсолютных констант», возникающих в гиперболической планиметрии.

Чтобы ввести модель на полуплоскости, потребуется подробнее рассмотреть некоторые группы преобразований, действующие на римановой сфере $\bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \infty$, и мы начнем главу с изучения этих преобразований.

§8.1. Аффинные и дробно-линейные преобразования комплексной плоскости $\bar{\mathbb{C}}$

В этом параграфе мы будем изучать различные подгруппы группы дробно-линейных преобразований, действующие на римановой сфере $\bar{\mathbb{C}}$. Эффективным инструментом в наших конструкциях будет понятие двойного отношения, с которого мы и начнем.

8.1.1. Двойное отношение четверки комплексных чисел $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ по определению равно

$$\langle z_1, z_2, z_3, z_4 \rangle := \frac{z_3 - z_1}{z_3 - z_2} : \frac{z_4 - z_1}{z_4 - z_2}. \quad (8.1)$$

8.1.2. Аффинные преобразования. Отображение комплексной плоскости на себя вида $z \mapsto az + b, \infty \mapsto \infty$, где $a, b \in \mathbb{C}$ и $a \neq 0$, называется *аффинным*. В частности, при $a = 1$ аффинное преобразование является параллельным переносом (на вектор \overline{OB} , где B — точка комплексной плоскости, которая соответствует комплексному числу b).

Теорема 8.1.3. Аффинные преобразования переводят прямые линии в прямые, окружности в окружности, сохраняют углы и двойные отношения.

Доказательство. Положив $a = re^{i\varphi}$, $r > 0$, можно записать

$$z \mapsto e^{i\varphi} z \mapsto r(e^{i\varphi} z) \mapsto (re^{i\varphi} z) + b = az + b.$$

Отсюда видно, что любое аффинное преобразование есть композиция поворота (на угол φ), гомотетии (с центром в нуле и коэффициентом r) и параллельного переноса (на вектор b). Отсюда следует утверждение теоремы, поскольку повороты, гомотетии и параллельные переносы заведомо обладают всеми четырьмя нужными свойствами. Наименее очевидно здесь, что гомотетии центром в нуле сохраняют двойное отношение, но это немедленно следует из того факта, что гомотетия на комплексной плоскости — умножение на вещественное число (которое сократится в каждой дроби двойного отношения). \square

8.1.4. Дробно-линейные преобразования. Преобразование комплексной плоскости, заданное на $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ формулой

$$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{где } ac - bd \neq 0, \quad (8.2)$$

и переводящее точку $-\frac{d}{c}$ в ∞ , а ∞ в $\frac{a}{c}$, называется *дробно-линейным*.

Множество всех дробно-линейных преобразований образует группу, которая называется группой Мёбиуса и обозначается $M\ddot{o}b$.

На самом деле можно следующим образом показать, что композиция дробно-линейных преобразований является дробно-линейным преобразованием: подставив $(a_1 z + b_1)/(c_1 z + d_1)$ вместо z в выражение $(az + b)/(cz + d)$, получим (после некоторых выкладок)

$$\frac{(aa_1 + bc_1)z + (ab_1 + bd_1)}{(ca_1 + dc_1)z + (cb_1 + dd_1)}, \quad (8.3)$$

но это выражение имеет вид (8.2), так что композиция действительно дробно-линейна.

Легко доказать также, что преобразование, обратное дробно-линейному, является дробно-линейным. Для этого достаточно найти значения a_1, b_1, c_1, d_1 (т. е. их выражения через a, b, c, d), при которых выражение (8.3) принимает вид $k(1 \cdot z + 0)/(0 \cdot z + 1)$; эти значения должны удовлетворять системе четырех линейных уравнений с четырьмя неизвестными

$$aa_1 + bc_1 = 1, \quad ab_1 + bd_1 = 0, \quad ca_1 + dc_1 = 0, \quad cb_1 + dd_1 = 1,$$

и эта система заведомо имеет ненулевое решение.

Следующее свойство дробно-линейных преобразований проливает свет на геометрический смысл этого класса преобразований и оказывается чрезвычайно полезным при их построении и анализе.

Лемма 8.1.5. Пусть z_1, z_2, z_3 и w_1, w_2, w_3 — две тройки различных точек на римановой сфере. Тогда существует единственное дробно-линейное преобразование, переводящее z_i в w_i , $i = 1, 2, 3$.

Теорема 8.1.6. Дробно-линейные преобразования переводят прямые и окружности в прямые или окружности и сохраняют углы и двойные отношения.

Доказательство. Легко видеть, что образ точки z при дробно-линейном преобразовании (8.1) можно выразить как

$$\frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)},$$

поэтому преобразование можно рассматривать как композицию

$$\begin{aligned} z \mapsto cz+d &=: z_1 \mapsto cz_1 =: z_2 \mapsto 1/z_2 =: z_3 \mapsto (bc-ad)z_3 =: z_4 \mapsto \\ &\mapsto \frac{a}{c} + z_4 = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c(cz+d)} = \frac{az+b}{cz+d} \end{aligned}$$

аффинного преобразования, гомотетии, преобразования $z \mapsto 1/z$, другой гомотетии и параллельного переноса. Обо всех этих преобразованиях, кроме $z \mapsto 1/z$, мы знаем, что они переводят прямые в прямые, окружности в окружности и сохраняют углы и двойные отношения.

Что касается преобразования $z \mapsto 1/z$, то прямое, хотя скучноватое вычисление показывает, что оно сохраняет двойные отношения (заменяем z_i на $1/z_i$, $i = 1, 2, 3, 4$, и полученные довольно громоздкие дроби после сокращений принимают вид исходного отношения). Далее, поскольку $\overline{1/z} = 1/\bar{z}$, преобразование $z \mapsto 1/z$ является композицией отражения и инверсии. Инверсия переводит прямые

и окружности в прямые или окружности и сохраняет углы (см. свойства (i)–(iii) из п. 7.1.1), что и доказывает теорему. \square

8.1.7. Два примера дробно-линейных преобразований. Дробно-линейные преобразования составляют предмет важной главы в теории функций комплексного переменного; в ней исследуется, какие типы областей можно отобразить друг в друга дробно-линейными преобразованиями. Нам не потребуется общая теория этого вопроса, но следующие два примера дробно-линейных преобразований будут очень важны в дальнейшем.

Пример 8.1.7.1. Дробно-линейное преобразование

$$\Omega: z \mapsto i \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

отображает единичный круг $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C} : |z|^2 \leq 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Im} z \geq 0\}$. Действительно, легко проверить, что точки $-1, i, 1$ отображаются в $0, -1, \infty$ соответственно, а это означает (по теореме 8.1.4), что граница круга \mathbb{D}^2 отображается на вещественную ось. Несложное вычисление показывает, что из неравенства $|z| < 1$ следует, что $\operatorname{Im}(\Omega(z)) > 0$, что и требовалось.

Пример 8.1.7.2. Дробно-линейные преобразования

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d} \quad \text{и} \quad z \mapsto \frac{a(-\bar{z})+b}{c(-\bar{z})+d}, \quad (8.4)$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ и $ac - bd > 0$, отображают верхнюю полуплоскость на себя, причем первое из них сохраняет, а второе меняет ориентацию полуплоскости.

В первом случае очевидно, что точки вещественной оси переходят в точки вещественной оси; далее, если $z, \operatorname{Im} z > 0$, — любая точка верхней полуплоскости, то

$$\operatorname{Im} \frac{az+b}{cz+d} = \operatorname{Im} \frac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \operatorname{Im} \frac{adz+bc\bar{z}}{|cz+d|^2} = \frac{(ad-bc)\operatorname{Im} z}{|cz+d|^2},$$

а эта величина положительна в точности тогда, когда $ac - bd > 0$.

Вторая формула отличается от первой преобразованием вида $z \mapsto -\bar{z}$, которое заведомо отображает верхнюю полуплоскость на себя, но меняет ориентацию.

Множество всех дробно-линейных преобразований (8.4) составляет группу относительно композиции (которую мы обозначаем $\mathbb{R} \operatorname{Möb}$). Действительно, множество всех дробно-линейных преобразований вида (8.2) является группой, а композиция преобразований, отображающих полуплоскость на себя, также отображает по-

полуплоскость на себя. Группа $\mathbb{R} \text{ Möb}$ будет группой преобразований модели на полуплоскости.

§ 8.2. Модель Пуанкаре на полуплоскости

Модель Пуанкаре на полуплоскости — это геометрия $(\mathbb{C}_+, \mathbb{R} \text{ Möb})$, где $\mathbb{C}_+ = \{z \in \mathbb{C}, \text{Im } z > 0\}$, с группой преобразований $\mathbb{R} \text{ Möb}$, определенной в п. 8.1.7. В этой геометрии прямые линии — это открытые полуокружности (в верхней полуплоскости), перпендикулярные прямой $\text{Im } z = 0$ (которая называется *абсолютом*), а также открытые лучи $\{z \in \mathbb{C} : \text{Re } z = x_0 \in \mathbb{R}, \text{Im } z > 0\}$.

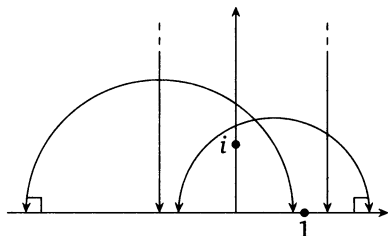


Рис. 8.1. «Прямые линии» в модели на полуплоскости

§ 8.3. Перпендикуляры и параллельные прямые

Ситуация с перпендикулярами и параллельными прямыми в модели на полуплоскости вполне аналогична случаю модели на круге, и лишь чертеж резко отличается.

Теорема 8.3.1. Для каждой точки P и прямой l в модели на полуплоскости существует единственный перпендикуляр к l , проходящий через P .

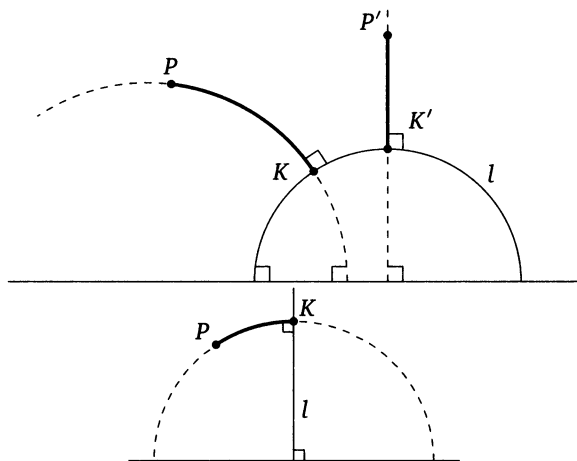


Рис. 8.2. Перпендикуляры в модели на полуплоскости

Доказательство. Нужно рассмотреть два случая (когда l является полупрямой или полуокружностью), см. рис. 8.2. В первом случае теорема следует из задачи 8.2, а во втором доказательство очевидно. \square

Теорема 8.3.2. Для любой точки P и любой прямой l в модели на полуплоскости существует бесконечно много прямых, проходящих через P и не пересекающих l . Все эти прямые лежат между двумя прямыми, параллельными l и проходящими через P .

Доказательство. Нужно рассмотреть два случая (когда l является полупрямой или полуокружностью); см. рис. 8.3. В первом случае теорема вытекает из очевидного факта, что существует ровно одна полуокружность с центром на вещественной оси, проходящая через точку X на вещественной оси и через точку P вне ее; во втором случае доказательство очевидно. \square

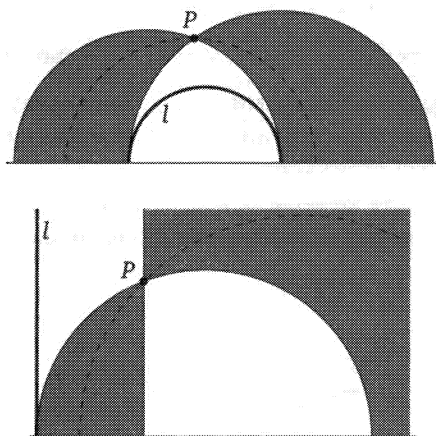


Рис. 8.3. Параллельные прямые в модели на полуплоскости

§ 8.4. Изометрии относительно расстояния Мёбиуса

Определим расстояние Мёбиуса $\mu(A, B)$ между двумя точками A, B верхней полуплоскости, положив

$$\mu(A, B) := |\ln(\langle A, B, X, Y \rangle)|,$$

где X и Y — точки пересечения прямой AB с абсолютом, если точки A, B имеют разную действительную часть (ясно, что $\langle A, B, X, Y \rangle \in \mathbb{R}$,

поскольку эти четыре точки лежат на окружности, так что логарифм определен корректно); если же $\operatorname{Re}(A) = \operatorname{Re}(B) = x_0$, то положим

$$\mu(A; B) := |\ln(\langle A, B, \infty, X \rangle)|,$$

где X — точка с координатами $(x_0; 0)$.

Теорема 8.4.1. *Группа изометрий верхней полуплоскости относительно расстояния μ совпадает с группой $\mathbb{R} \text{ Möb}$, описанной в примере 8.1.7.1.*

Доказательство состоит в неинтересной проверке, которую мы опустим. \square

§ 8.5. Задачи

8.1. Докажите следующее:

а) дробно-линейные преобразования сохраняют двойное отношение четверки точек на римановой сфере $\bar{\mathbb{C}}$;

б) дробно-линейное преобразование однозначно определяется образами трех точек.

8.2. Пусть l — прямая на евклидовой плоскости, γ — окружность с центром O на l , P — точка, не лежащая на l и на перпендикуляре к l из O . Докажите, что существует единственная окружность с центром на l , проходящая через P и ортогональная к γ .

8.3. Пусть l — прямая на евклидовой плоскости, γ — окружность с диаметром AB , лежащим на l , P — точка, не лежащая на l и на γ . Докажите, что существуют единственная окружность с центром на l , проходящая через P и A , и единственная окружность с центром на l , проходящая через P и B .

8.4. Докажите, что все движения (т. е. изометрии, сохраняющие ориентацию) модели Пуанкаре на круге имеют вид

$$z \mapsto \frac{az + b}{\bar{b}z + \bar{a}},$$

где a и b — комплексные числа, для которых $|a|^2 - |b|^2 = 1$.

8.5. Покажите, что для любых двух флагов найдется изометрия модели на полуплоскости, которая отображает первый флаг во второй (флаг — это тройка, состоящая из прямой на гиперболической плоскости, одной из полуплоскостей с границей l и точки на этой прямой).

8.6*. Найдите формулу для площади треугольника в гиперболической геометрии.

Глава 9

Модель Кэли—Клейна

В этой главе мы изучим еще одну модель гиперболической планиметрии: модель Кэли—Клейна. Ее множество точек состоит из всех точек открытого круга (как и в случае модели Пуанкаре на круге), а ее группа преобразований изоморфна \mathcal{M} (группе преобразований модели Пуанкаре), но ее действие на двух моделях не одинаково. В результате прямые в двух моделях выглядят очень по-разному: вместо дуг окружностей, как в модели Пуанкаре, прямые во второй модели являются открытыми хордами окружности.

Другое существенное различие в нашем подходе к двум моделям относится к определению модели Кэли—Клейна как геометрии (в смысле Клейна), т. е. к определению ее группы преобразований. Это делается более традиционным образом: мы начнем с определения расстояния между точками, а затем введем группу преобразований геометрии Кэли—Клейна как группу изометрий относительно этого расстояния, т. е. как группу всех биекций множества точек данной геометрии, сохраняющих расстояние.

§ 9.1. Изометрия и модель Кэли—Клейна

9.1.1. Функция расстояния. Пусть \mathbb{L}^2 — внутренность единичного круга на евклидовой плоскости, A и B — две ее точки. Предположим, что (евклидова) прямая AB пересекает границу круга \mathbb{H}^2 в точках X и Y , причем точки Y, A, B, X лежат на прямой AB именно в таком порядке (см. рис. 9.1).

Тогда *расстояние* d между точками A и B определяется по формуле

$$d(A, B) := \frac{1}{2} \ln \left(\frac{|AX|}{|BX|} : \frac{|AY|}{|BY|} \right). \quad (9.1)$$

Коэффициент $1/2$ в правой части равенства (9.1) можно заметить любым другим положительным вещественным числом c — все

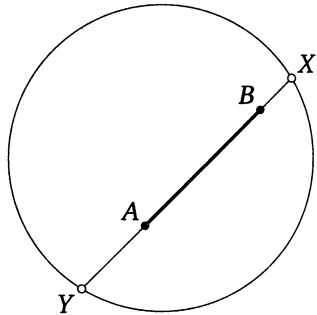


Рис. 9.1. Прямая в модели Кэли—Клейна

такие расстояния задают одну и ту же геометрию (с точностью до изоморфизма, но не до изометрии). Причина этого странного выбора ($c = 1/2$ вместо более естественного $c = 1$) в том, что коэффициент $c = 1/2$ приводит к более изящным формулам, чем $c = 1$, и дает ту же метрику, что в модели Пуанкаре.

Заметим, что если точки Y, A, B, X упорядочены на прямой AB , как показано на рис. 9.1 (причем $A \neq B$), то выражение под знаком логарифма превосходит 1 и потому расстояние между A и B положительно. Заметим, далее, что если ввести координаты на прямой AB , поместив начало координат «слева» от Y и сопоставив вещественные числа u, a, b, x точкам Y, A, B, X соответственно, то выражение под знаком логарифма можно заменить следующим двойным отношением:

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b} = \langle a, b, x, y \rangle.$$

Это двойное отношение выглядит очень похоже на то, которым мы пользовались, определяя расстояние в модели на полуплоскости, но нужно подчеркнуть, что здесь мы имеем дело с вещественными числами, а не с комплексными.

9.1.2. Свойства функции расстояния. *Функция расстояния d вида (9.1) задает метрику на открытом круге \mathbb{L}^2 , т. е.*

- (i) $d(A, B) \geq 0$, причем $d(A, B) = 0$ в точности тогда, когда $A = B$;
- (ii) $d(A, B) = d(B, A)$;
- (iii) $d(A, B) + d(B, C) \geq d(A, C)$.

Доказательство. Пункт (i) очевиден: расстояние $d(A, B)$ между различными точками A и B положительно (как мы показали выше), а если $A = B$, то знаменатели в формуле (9.1) сокращаются и остается $\ln(1) = 0$.

Пункт (ii) вытекает из очевидной формулы

$$\frac{x-a}{x-b} : \frac{y-a}{y-b} = \left(\frac{x-b}{x-a} : \frac{y-b}{y-a} \right)^{-1}.$$

Наконец, пункт (iii) можно доказать с помощью проективных преобразований. Отложим его доказательство до гл. 12 (см. задачу 12.12), поскольку сейчас мы не будем его использовать. \square

9.1.3. Определение модели Кэли—Клейна. Как уже сказано выше, мы зададим геометрию (в смысле определения 1.4.1) модели Кэли—Клейна, взяв в качестве ее группы преобразований группу изометрий относительно расстояния d , т. е. группу всех биекций

множества \mathbb{L}^2 , сохраняющих расстояние; обозначим ее \mathcal{N} . (Позже мы докажем, что группа \mathcal{N} изоморфна \mathcal{M} — группе преобразований модели Пуанкаре на круге, но сейчас это для нас несущественно.)

Таким образом, мы определяем модель Кэли—Клейна гиперболической плоскости как геометрию $(\mathbb{L}^2 : \mathcal{N})$, где \mathcal{N} — группа изометрий открытого единичного круга \mathbb{L}^2 относительно расстояния (9.1).

9.1.4. Прямые и точки в модели Кэли—Клейна. Как уже сказано выше, точки модели Кэли—Клейна, — это просто точки открытого единичного круга \mathbb{L}^2 на \mathbb{R}^2 . Граница круга по традиции называется *абсолютом*, и ее точки не принадлежат нашей геометрии.

Прямые в рассматриваемой геометрии определяются как хорды абсолюта (без концевых точек). Из этого определения немедленно следуют важнейшие факты: *через любые две различные точки проходит ровно одна прямая; две несовпадающие прямые либо не пересекаются, либо имеют ровно одну общую точку.*

В двух следующих параграфах, аналогично соответствующим параграфам двух предыдущих глав, мы выведем основные утверждения гиперболической геометрии в рамках рассматриваемой модели.

§ 9.2. Параллельность в модели Кэли—Клейна

Ситуация с параллельностью в этой модели аналогична случаю модели Пуанкаре на круге, и лишь чертеж выглядит несколько иначе (прямолинейные хорды вместо дуг окружностей).

9.2.1. Определения. Для данной прямой $l = AB$ и точки P вне ее нетрудно указать прямые, которые проходят через P и не пересекают l . В самом деле, обозначим через k и t прямые, проходящие через P и через точки пересечения X, Y прямой l с абсолютом. Мы видим, что любая прямая, проходящая через P и лежащая между k и t , не пересекает прямую l ; эти прямые называются *расходящимися* с AB , а прямые k и t — *параллельными* AB прямыми, проходящими через P (см. рис. 9.2).

Более общим образом, две прямые (т. е. открытые хорды круга) *параллельны*, если они имеют одну общую точку на абсолюте и ни одной в круге; если две прямые (хорды) вовсе не имеют общих точек (в замкнутом круге \mathbb{H}^2), то они называются *расходящимися*.

Мы показали, что существует бесконечно много прямых, проходящих через данную точку P и не пересекающих данную прямую

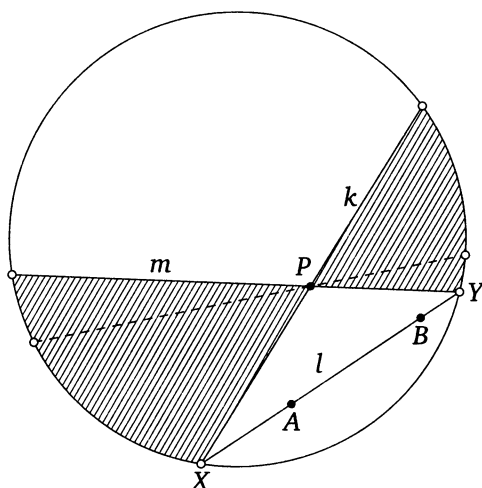


Рис. 9.2. Параллельные и расходящиеся прямые

$l = AB$, где $P \notin l$; все эти прямые расположены между двумя прямыми, параллельными l и проходящими через P .

Замечание 9.2.2. Отметим, что множество всех прямых, проходящих через фиксированную точку абсолюта, заполняет всю гиперболическую плоскость \mathbb{L}^2 (см. рис. 9.3, где изображены обе модели на круге).

Это означает, что, используя метрику на каждой из этих прямых, можно попытаться определить понятие «параллельного переноса», а значит возникает понятие «свободного вектора» в гиперболиче-

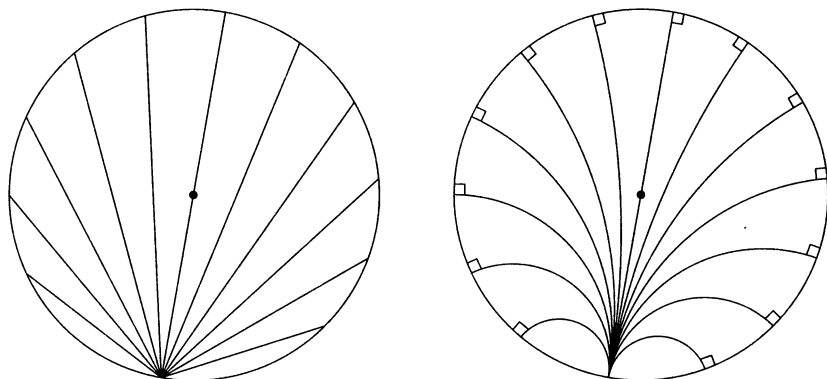


Рис. 9.3. Параллельные прямые, заполняющие гиперболическую плоскость

ской геометрии. Это наводит на мысль о том, чтобы ассоциировать с нашей геометрией линейное пространство. К сожалению, это невозможно (см. обсуждение в п. 9.4.1 и в задаче 9.7).

§ 9.3. Перпендикуляры в модели Кэли—Клейна

9.3.1. На что они похожи. В отличие от перпендикуляров в модели Пуанкаре на круге, перпендикулярные прямые в модели Кэли—Клейна не образуют прямые углы в евклидовом смысле. Точная конструкция примера показана на рис. 9.4 (нетривиальная геометрическая конструкция, служащая для построения этой «гиперболически перпендикулярной прямой», не видна на рисунке и будет обсуждаться в следующей главе, п. 10.1.5).

9.3.2. Определения. Прежде чем говорить о перпендикулярности, нужно определить, что такое перпендикулярные прямые. Для этого определим сначала *отражение от данной прямой* как нетождественную изометрию круга \mathbb{L}^2 , оставляющую на месте каждую точку этой прямой. Теперь можно определить *перпендикулярные прямые* как такие, что отражение от одной из них оставляет другую на месте. Тогда существует ровно один перпендикуляр к данной прямой, проходящий через данную точку, но доказательство этого факта непосредственно в модели Кэли—Клейна весьма трудно, и мы его не приводим.

Замечание 9.3.3. Нужно подчеркнуть, что «гиперболическая мера» углов в нашей модели, вообще говоря, не равна их евклидовой

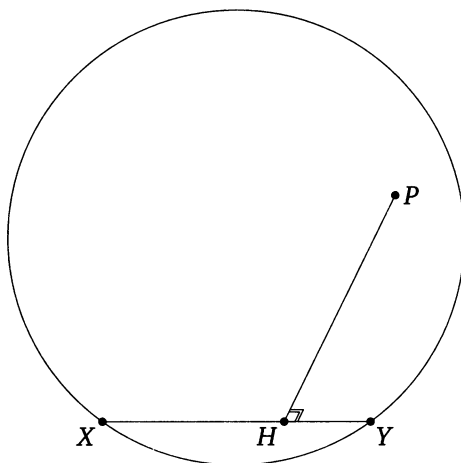


Рис. 9.4. Перпендикуляр странного вида

мере. В частности, треугольники в модели Кэли—Клейна, которые выглядят как прямолинейные евклидовы треугольники, имеют сумму углов меньше π (вопреки тому, что мы видим).

§ 9.4. Гиперболическая прямая и теория относительности

В этом параграфе мы отвлечемся от рассмотрения функции расстояния на гиперболических прямых и рассмотрим замечательное соотношение между композицией сдвигов вдоль такой прямой и аддитивностью скоростей в специальной теории относительности Эйнштейна. Однако начнем мы с общего замечания о векторах в гиперболической геометрии.

9.4.1. Замечание о свободных векторах. Понятие свободного вектора в евклидовой геометрии, т. е. класса эквивалентности равных закрепленных векторов, позволяет связать с евклидовой плоскостью двумерное вещественное векторное пространство, состоящее как раз из свободных векторов на этой плоскости. Кроме того, любой свободный вектор естественным образом определяет параллельные переносы всей плоскости. Все это возможно, поскольку в каждой точке евклидовой плоскости есть ровно один (закрепленный) вектор, который так же направлен и имеет ту же длину, что и данный (закрепленный) вектор. На гиперболической плоскости, наделенной метрикой, можно говорить о векторах равной длины, но выражение «направлен так же» бессмысленно (ср. замечание 9.2.2), так что *нельзя корректно определить понятие параллельного переноса*. Однако понятие параллельного переноса *вдоль фиксированной гиперболической прямой* имеет смысл, и мы обсудим его в следующем пункте.

9.4.2. Сложение сдвигов и скоростей. В модели Кэли—Клейна выберем гиперболическую прямую (т. е. открытую хорду открытого круга \mathbb{L}^2) и параметризуем ее (в евклидовой метрике) подходящим параметром x так, чтобы она была изометрична интервалу $(-1, 1)$. Пусть v — вещественное число, меньшее чем 1 по абсолютной величине. Рассмотрим отображение

$$T_v : [-1, 1] \rightarrow [-1, 1], \quad x \mapsto \frac{x+v}{xv+1}.$$

Легко доказать, что T_v — биекция отрезка $[-1, 1]$ на себя, оставляющая на месте его концы, а ее ограничение на интервал $(-1, 1)$ есть

изометрия относительно гиперболического расстояния (подробности см. в задаче 9.9). Поэтому можно рассматривать эту изометрию как сдвиг вдоль данной гиперболической прямой на вектор v .

Вычислим композицию сдвигов на векторы v_1 и v_2 :

$$x \mapsto \frac{x+v_1}{xv_1+1} \mapsto \frac{\frac{x+v_1}{xv_1+1}+v_2}{\frac{x+v_1}{xv_1+1}v_2+1} = \frac{x + \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}}{x \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2} + 1};$$

мы видим, что композиция $T_{v_2} \circ T_{v_1}$ — это в точности параллельный перенос T_v , где v определяется формулой

$$v := \frac{v_1+v_2}{1+v_1v_2}. \quad (9.2)$$

Таким образом, мы доказали, что композиция двух параллельных переносов на векторы v_1 и v_2 есть параллельный перенос на вектор v , заданный формулой (9.2).

Читатель возможно заметил, что эта формула аналогична известной формуле Эйнштейна для сложения скоростей:

$$v = \frac{v_1+v_2}{1+\frac{v_1v_2}{c^2}},$$

где c — скорость света. Две формулы различаются лишь выбором шкалы скоростей: в нашей гиперболической шкале «скорость света» принята равной 1. Отметим, что в обеих ситуациях если «векторы скоростей» v_1 и v_2 очень малы по сравнению с константой c (или, в нашем случае, с единицей), то v приближенно равно $v_1 + v_2$.

Предыдущее замечание — аргумент в пользу того, что наша вселенная скорее гиперболическая, чем евклидова. На самом деле большинство физиков считают, что неверно ни то, ни другое.

§9.5. Задачи

9.1. Докажите, что для трех точек A, B, C , лежащих на одной прямой, причем B между A и C , выполнено равенство $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$.

9.2. Докажите, что из равенства $d(A, B) + d(B, C) = d(A, C)$ вытекает, что точки A, B, C лежат на одной прямой и B лежит между A и C .

9.3. Докажите, что отражение от прямой в модели Кэли—Клейна является инволюцией.

9.4. Покажите, что понятие перпендикулярных прямых в модели Кэли—Клейна (введенное в п. 9.3.2) корректно определено (т. е. не зависит от порядка, в котором указаны две прямые).

9.5. Докажите, что четыре угла при точке пересечения двух перпендикулярных прямых конгруэнтны.

9.6*. Докажите, что сумма углов треугольника в модели Кэли—Клейна меньше π , исходя непосредственно из определений, относящихся к модели.

9.7. Пусть понятие свободного вектора в гиперболической геометрии определено согласно п. 9.2.2. Попробуйте определить сумму двух векторов и исследуйте возможность сопоставить гиперболической планиметрии двумерное векторное пространство.

9.8. В модели Кэли—Клейна постройте треугольник с суммой углов, меньшей чем заданное положительное ε .

9.9. Покажите, что параллельный перенос T_v (определение см. в п. 9.4.2) действительно переводит интервал $(-1; 1)$ в себя, и найдите функцию гиперболического расстояния, для которой он является изометрией.

Глава 10

Тригонометрия на гиперболической плоскости и абсолютные константы

В начале этой главы мы покажем, что три модели гиперболической плоскости — это на самом деле изоморфные геометрии. Во всем дальнейшем изучении гиперболической планиметрии мы благодаря этому будем свободны в выборе модели, более удобной в том или ином контексте. Наш курс включает основные формулы гиперболической тригонометрии, в связи с чем потребуется напомнить определения гиперболических функций, обычно изучаемых в комплексном анализе. Завершая эту главу, мы узнаем, что в гиперболической геометрии, в отличие от евклидовой, имеются внутренние абсолютные константы.

§ 10.1. Изоморфизм между двумя моделями на круге

Как мы отметили в предыдущей главе, модель Кэли—Клейна и модель Пуанкаре на круге изоморфны. Это означает, что существует биекция между множествами их точек, а также изоморфизм между их группами преобразований, причем они согласованы в смысле п. 1.4.4. Для доказательства потребуется классическая конструкция из евклидовой стереометрии.

10.1.1. Стереографическая проекция. Пусть \mathbb{S}^2 — единичная сфера, Π — ее экваториальная плоскость, N — ее северный полюс. Стереографическая проекция

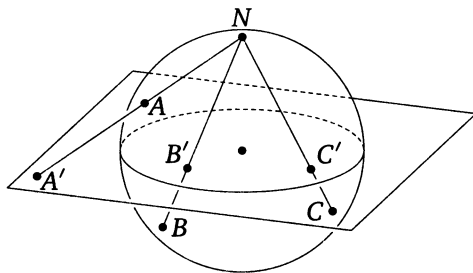


Рис. 10.1. Стереографическая проекция

реографическая проекция $\sigma: \Pi \rightarrow \mathbb{S}^2$ — это отображение, которое переводит каждую точку $M \in \mathbb{S}^2 \setminus N$ в точку пересечения M' прямой NM с Π (см. рис. 10.1).

Очевидно, σ является биекцией множества $\mathbb{S}^2 \setminus \{N\}$ на Π . Нетрудно также доказать, что стереографическая проекция конформна (см. задачу 10.1).

10.1.2. Биекция между множествами точек двух моделей на круге. Будем считать пересечение открытого единичного шара с экваториальной плоскостью Π множеством \mathbb{L}^2 точек обеих моделей на круге. Чтобы доказать, что они изоморфны, вначале установим некоторую биекцию β между точками той и другой модели. Эта биекция не есть тождественное отображение; она может быть описана следующим образом.

Пусть A — произвольная точка на \mathbb{L}^2 , а XY — хорда (абсолюта), перпендикулярная радиусу OA (рис. 10.2). Рассмотрим вертикальную плоскость, содержащую XY ; она пересекает единичную сферу по окружности. Пусть A_1 — пересечение этой окружности с вертикальным лучом, проходящим через A сверху вниз. Теперь соединим A_1 с N и обозначим через A' пересечение A_1N с экваториальной плоскостью. Соответствие $A \mapsto A'$ задает отображение из \mathbb{L}^2 в \mathbb{L}^2 , которое мы обозначим β .

Нетрудно доказать, что отображение β является биекцией круга \mathbb{L}^2 на себя (подробности см. в задаче 10.2).

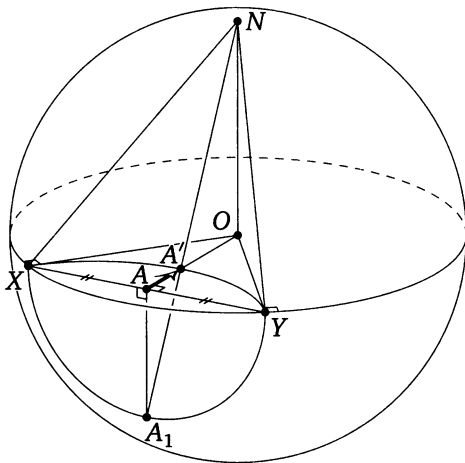


Рис. 10.2. Биекция между двумя моделями на круге

10.1.3. Изоморфизм между двумя группами преобразований.

Следующий шаг в доказательстве того, что две модели на круге изоморфны как геометрии, — построение изоморфизма между их группами преобразований \mathcal{N} и \mathcal{M} , согласованного с β . Но это построение в некотором смысле происходит автоматически, поскольку, как мы увидим, условие согласованности предписывает выбор изоморфизма.

Наша цель — построить изоморфизм $\varphi: \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{M}$, где \mathcal{N} и \mathcal{M} — соответственно группы преобразований моделей Кэли—Клейна и Пуанкаре на круге. Пусть $g \in \mathcal{N}$ — произвольный элемент, A — произвольная точка круга Пуанкаре. Определим элемент $\varphi(g)$, положив

$$(\varphi(g))(A) := \beta(g(\beta^{-1}(A))),$$

где β — биекция, описанная в предыдущем пункте. Согласно этой формуле, чтобы получить образ $B := (\varphi(g))(A)$ произвольной точки A при $\varphi(g)$, нужно произвести единственно возможные естественные действия: перетянуть точку A с круга Пуанкаре на круг Кэли—Клейна посредством β^{-1} , к полученной точке $A' := \beta^{-1}(A)$ применить g и вернуть полученную точку $g(\beta^{-1}(A))$ на круг Пуанкаре посредством β (см. рис. 10.3).

Тот факт, что φ — гомоморфизм групп, очевиден по построению, биективность легко доказывается (см. задачу 10.3), а тот факт, что пара (β, φ) — изоморфизм геометрий, также вытекает из построения. Мы доказали следующую теорему.

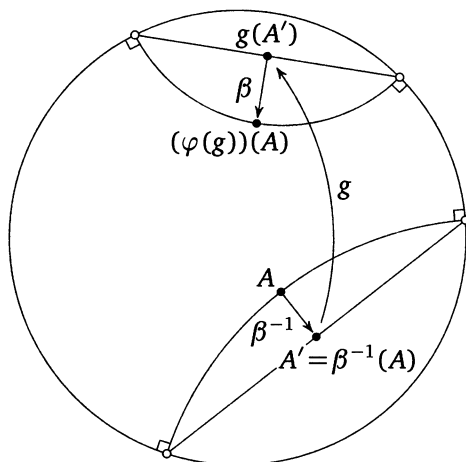


Рис. 10.3. Изоморфизм двух моделей на круге

Теорема 10.1.4. *Отображение β из п. 10.1.3 задает изоморфизм геометрии $(\mathbb{L}^2 : \mathcal{N})$ (модели Кэли—Клейна) и геометрии $(\mathbb{L}^2 : \mathcal{M})$ (модели Пуанкаре на круге), если задать соответствующий изоморфизм (который мы обозначаем φ) группы \mathcal{N} с группой \mathcal{M} , положив*

$$(\varphi(g))(A) := \beta(g((\beta^{-1}(A))),$$

где A — произвольная точка круга Пуанкаре и $g \in \mathcal{N}$.

10.1.5. Построение перпендикуляров в модели Кэли—Клейна. Наличие конкретного изоморфизма между двумя моделями на круге можно использовать, чтобы построить «перпендикуляры странного вида» (снова взглянем на рис. 9.4) в модели Кэли—Клейна. Для этого посредством биекции β из п. 10.1.2 перейдем в модель Пуанкаре на круге, где мы умеем строить перпендикуляры (см. теорему 7.4.2), а затем, выполнив это построение, вернемся в модель Кэли—Клейна посредством β^{-1} , получая искомые перпендикуляры.

Опишем построение более подробно (см. рис. 10.4). Даны прямая $l = XY$ и точка P в модели Кэли—Клейна \mathbb{L}^2 . Прежде всего, построим хорду WZ , содержащую P и перпендикулярную радиусу OP . Далее, построим две дуги окружностей, перпендикулярные абсолюту и проходящие через точки X, Y и W, Z . Обозначим через P' точку пересечения дуги, стягивающей WZ , с радиусом OP . Заметим, что эти дуги — образы прямых Кэли—Клейна XY и WZ при биекции β

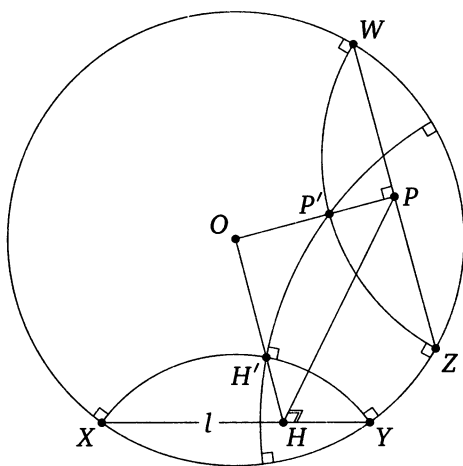


Рис. 10.4. Построение перпендикуляров в модели Кэли—Клейна

(см. п. 10.1.2), и потому они являются прямыми в модели Пуанкаре на круге.

Через точку P' проведем дугу, ортогональную абсолюту и дуге l' , стягивающей XU (см. теорему 7.4.2), и обозначим через H' точку пересечения этих двух дуг. Заметим, что H' — основание перпендикуляра из P' на l' , в смысле круга Пуанкаре. Если теперь провести луч $[O, H']$, то точка его пересечения H с прямой l будет основанием искомого перпендикуляра, опущенного из P на l , поскольку отображение β^{-1} переводит перпендикуляр Пуанкаре $P'H'$ в перпендикуляр Кэли—Клейна PH .

§ 10.2. Изоморфизм между двумя моделями Пуанкаре

В этом параграфе мы покажем, что модель Пуанкаре на круге (глава 7) изоморфна модели на полуплоскости, рассмотренной в гл. 8. Для этого потребуются дробно-линейное преобразование Ω , заданное (см. пример 8.1) формулой

$$\Omega: z \mapsto i \cdot \frac{1+z}{1-z};$$

Ω отображает единичный круг $\mathbb{D}^2 := \{z \in \mathbb{C}: |z| \leq 1\}$ на верхнюю полуплоскость $\mathbb{C}_+ := \{z \in \mathbb{C}: \operatorname{Im} z > 0\}$. Преобразование Ω вместе с условием согласованности (эквивариантности) определяет изоморфизм между двумя геометриями. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 10.2.1. *Отображение Ω из примера 8.1 задает изоморфизм геометрии $(\mathbb{L}^2: \mathcal{M})$ (модель Пуанкаре на круге из гл. 7) и геометрии $(\mathbb{C}_+: \mathbb{R} \operatorname{Möb})$ (модель Пуанкаре на полуплоскости), если задать соответствующий изоморфизм (который мы обозначим Δ) групп $\mathbb{R} \operatorname{Möb}$ и \mathcal{M} , положив*

$$M \ni g \mapsto \Omega \circ g \circ \Omega^{-1} \in \mathbb{R} \operatorname{Möb}.$$

Доказательство. Отображение Ω взаимно однозначно, поскольку очевидно, что правило $w \mapsto (i - w)/(i + w)$ определяет обратное ему отображение. Изоморфизм Δ согласован с действием групп по определению. \square

Теперь определим расстояние Лобачевского λ между двумя точками A, B открытого круга \mathbb{L}^2 (в рамках модели Пуанкаре на круге), положив

$$\lambda(A, B) := |\ln(\langle A, B, X, Y \rangle)|,$$

где X и Y — точки пересечения прямой AB с абсолютом.

Из теоремы 8.1.3, леммы 8.1.5 и теоремы 10.2.1 немедленно вытекает следующий результат.

Следствие 10.2.2. *Группа изометрий круга относительно расстояния λ совпадает с группой \mathcal{M} , порожденной всеми отражениями от «прямых линий» в модели на круге.*

Поскольку изоморфизм геометрий — транзитивное отношение, справедливо

Следствие 10.2.3. *Три модели гиперболической геометрии, а именно модели Пуанкаре на круге и полуплоскости и модель Кэли—Клейна, изоморфны как геометрии в смысле Клейна.*

§ 10.3. Гиперболические функции

Комплексная экспонента e^z , $z \in \mathbb{C}$, связана с обычными тригонометрическими функциями замечательной формулой Эйлера:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi.$$

Формула становится очевидной, если рассмотреть единичный круг на комплексной плоскости с центром в нуле. Вещественная экспонента e^x , $x \in \mathbb{R}$, связана с «тригонометрическими функциями» гиперболической геометрии, которые известны как *гиперболические функции* sh , ch , th , cth (*гиперболический синус, косинус, тангенс, котангенс* соответственно) и заданы формулами

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{2}, & \operatorname{ch} x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \\ \operatorname{th} x &:= \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, & \operatorname{cth} x &:= \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}. \end{aligned}$$

Эти функции удовлетворяют соотношениям, которые аналогичны формулам для обычных тригонометрических функций. Вот некоторые примеры:

$$\begin{aligned} \operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x &= 1, & \operatorname{th} x \operatorname{cth} x &= 1, \\ \operatorname{sh} 2x &= 2 \operatorname{sh} x \operatorname{ch} x, & \operatorname{ch} 2x &= \operatorname{sh}^2 x + \operatorname{ch}^2 x, \\ \operatorname{sh}(x \pm y) &= \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{ch} x \operatorname{sh} y, & \operatorname{ch}(x \pm y) &= \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y \pm \operatorname{sh} x \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Доказать их можно, подставляя определения в формулы и производя несложные выкладки.

§ 10.4. Тригонометрия на гиперболической плоскости

Ввиду следствия 10.2.3 элементарные тригонометрические формулы для гиперболических треугольников совершенно одинаковы для

моделей на полуплоскости и круге. Их доказательства просты (пожалуй, чуть проще в случае полуплоскости) и включены в задачи. Сформулируем их в виде теорем. Ниже ABC — треугольник, α, β, γ — углы, противоположные вершинам A, B, C соответственно, a, b, c — стороны, противолежащие этим вершинам.

Теорема 10.4.1 (гиперболическая теорема синусов).

$$\frac{\operatorname{sha}}{\sin \alpha} = \frac{\operatorname{sh} b}{\sin \beta} = \frac{\operatorname{sh} c}{\sin \gamma}.$$

Теорема 10.4.2 (гиперболическая теорема косинусов).

$$\operatorname{cha} = \operatorname{ch} b \operatorname{ch} c - \operatorname{sh} c \operatorname{sh} b \cos \alpha.$$

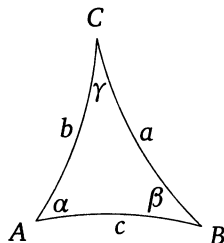


Рис. 10.5

§ 10.5. Угол параллелизма и константа Швейкарта

10.5.1. Пусть AB — прямая в гиперболической геометрии (здесь можно использовать любую из моделей), а C — не принадлежащая ей точка; X и Y — точки пересечения прямой AB с абсолютом, так что лучи $[C, X)$ и $[C, Y)$ параллельны AB ; пусть $[C, H]$, $H \in AB$, — перпендикуляр, опущенный из C на AB ; $d := \lambda(C, H)$ — расстояние Лобачевского между C и H ; наконец, α — величина угла XCH , или, что то же самое, угла YCH (см. рис. 10.6).

Тогда нетрудно доказать, что α зависит только от d (см. задачу 10.11); α называется *углом параллелизма*.

Теорема 10.5.2. Угол параллелизма α определяется по формуле

$$\operatorname{th} d = \cos \alpha.$$

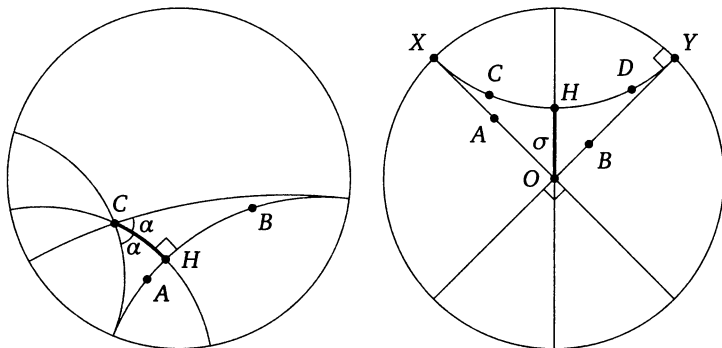


Рис. 10.6. Угол параллельности и константа Швейкарта

Доказательство см. в задаче 10.9.

Эта формула показывает, в частности, что при очень малом d угол параллелизма близок к $\pi/2$, а при больших значениях d угол α становится очень малым.

10.5.3. Пусть теперь O — центр модели на круге, а $[O, A)$ и $[O, B)$ — перпендикулярные лучи, исходящие из O ; X и Y — точки пересечения лучей $[O, A)$ и $[O, B)$ с абсолютом; CD — прямая, пересекающая абсолют в точках X и Y ; $[O, H)$, $H \in CD$, — перпендикуляр, опущенный из O в CD ; $\sigma := \lambda(O, H)$ — гиперболическое расстояние между O и H .

Число σ называется *константой Швейкарта*; это абсолютная константа гиперболической плоскости. Если мы мыслим гиперболическую геометрию как модель физической реальности, то приходим к выводу, что в нашей вселенной существует абсолютная единица длины (в евклидовой модели пространства такая единица не возникает).

10.5.4. Другая абсолютная константа гиперболической геометрии возникает при измерении некоторой эталонной площади, а именно площади специального бесконечного «треугольника». Чтобы его построить, рассмотрим три луча, исходящие из центра модели на круге (на самом деле подойдет и любая другая точка) и образующие углы $2\pi/3$. Пусть X, Y, Z — точки их пересечения с абсолютом. Рассмотрим прямые XY, YZ, ZX . Они образуют «бесконечный равносторонний треугольник», все три угла которого равны нулю. Его площадь можно найти по формуле для площади треугольника в гиперболической геометрии:

$$S = \pi - \alpha - \beta - \gamma \Rightarrow S = \pi$$

(см. главу 8 и задачу 8.6).

Вышеприведенное рассуждение не очень строго, поскольку использована формула, применимая лишь к конечным треугольникам, но его можно сделать строгим, приближая треугольник XYZ конечными треугольниками и переходя к пределу.

Таким образом, мы получили вторую абсолютную константу, а именно π , равную площади фигуры, ограниченной тремя прямыми, соединяющими три точки абсолюта.

Замечание 10.5.5. Выше мы отметили (см. § 9.4), что формула сложения векторов на гиперболической прямой очень похожа на формулу Эйнштейна для сложения скоростей в инерциальной системе отсчета. В этом параграфе мы получили две абсолютные

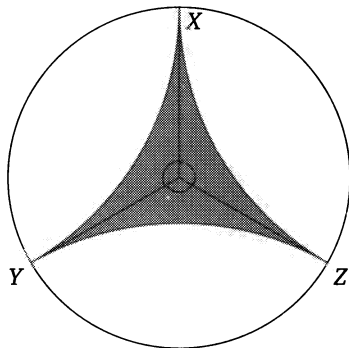


Рис. 10.7. Бесконечный треугольник

константы — это еще одна черта гиперболической геометрии, сближающая ее с физикой Эйнштейна, в которой тоже появляются абсолютные константы (например, скорость света). В связи с этим заметим, что слово «относительность» не должно вводить в заблуждение: теория Эйнштейна не утверждает, что «все относительно»; напротив, она предоставляет нам физически значимые абсолютные константы, чего не может сделать евклидова модель вселенной. С другой стороны, нежизненна и физическая модель, полностью основанная на гиперболической стереометрии и независимой «оси времени»: наша вселенная устроена сложнее, время и пространство не независимы; согласно Эйнштейну, они в некотором смысле «смешиваются».

§ 10.6. Задачи

10.1. Докажите, что стереографическая проекция конформна (т. е. сохраняет угловую меру).

10.2. Докажите, что отображение β , построенное в п. 10.1.2, биективно. Покажите, что β переводит любую хорду круга \mathbb{L}^2 (т. е. любую прямую в модели Кэли—Клейна) в дугу окружности, проходящей через X и Y и ортогональной абсолюту (т. е. в прямую в модели Пуанкаре на круге).

10.3. Докажите основные соотношения между гиперболическими функциями, приведенные в § 10.3.

10.4. Докажите гиперболическую теорему синусов.

10.5. Докажите гиперболическую теорему косинусов.

10.6. Докажите, что в гиперболической геометрии конгруэнтны любые два треугольника, стороны которых соответственно равны.

10.7. Докажите, что в гиперболической геометрии конгруэнтны любые два треугольника, у которых равен угол и соответственно равны его стороны.

10.8. Покажите, что в гиперболической геометрии гомотетия не конформна.

10.9. а) Докажите формулу угла параллельности α для точки A и прямой l :

$$\operatorname{th}(d) = \cos(\alpha),$$

где d — расстояние от A до l (тем самым показав, что угол параллельности зависит только от расстояния между точкой и прямой).

б) Докажите, что предыдущая формула равносильна следующей (полученной независимо Бойяи и Лобачевским):

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = e^{-d}.$$

10.10. Докажите, что в треугольнике с прямым углом γ стороны a, b, c и противоположные им углы $\alpha, \beta, \gamma = \pi/2$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} a &= \operatorname{sh} c \sin \alpha; & \operatorname{th} b &= \operatorname{th} c \cos \alpha; \\ \operatorname{ctg} \alpha \operatorname{ctg} \beta &= \operatorname{ch} c; & \cos \alpha &= \operatorname{ch} a \sin \beta. \end{aligned}$$

Что происходит с этими соотношениями, когда a, b, c становятся очень малыми?

10.11. Докажите, что стороны a, b, c и противоположные им углы α, β, γ произвольного треугольника на гиперболической плоскости удовлетворяют следующим соотношениям:

$$\text{а) } \operatorname{ch} a \sin \beta = \operatorname{ch} b \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \gamma;$$

$$\text{б) } \operatorname{ch} a = \frac{\cos \alpha + \cos \beta \cos \gamma}{\sin \beta \sin \gamma}.$$

10.12. Докажите, что если соответствующие углы двух треугольников равны, то треугольники конгруэнтны.

10.13. Докажите, что все точки (евклидовой) прямой $y = kx$, лежащие в верхней полуплоскости $y > 0$, равноудалены от (гиперболической) прямой Oy .

10.14. а) Докажите, что любая гиперболическая окружность, лежащая внутри одной из моделей гиперболической геометрии Пуанкаре, в действительности есть евклидова окружность.

б) В модели Пуанкаре на верхней полуплоскости найдите евклидов центр и евклидов радиус гиперболической окружности радиуса r с центром в точке (a, b) .

в) В модели Пуанкаре на единичном круге D найдите соотношение между радиусами евклидова и гиперболического кругов, центр которых совпадает с центром круга D .

10.15. Докажите неравенство треугольника для расстояния в модели Пуанкаре на полуплоскости.

10.16. Докажите, что три а) биссектрисы, б) медианы, в) высоты гиперболического треугольника пересекаются в одной точке.

10.17. (*Гиперболическая теорема Менелая.*) Пусть прямая l пересекает прямые BC , CA , AB (содержащие стороны треугольника ABC) в точках A_1 , B_1 , C_1 соответственно; тогда

$$\frac{\operatorname{sh}|AC_1|}{\operatorname{sh}|C_1B|} \cdot \frac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|A_1C|} \cdot \frac{\operatorname{sh}|CB_1|}{\operatorname{sh}|B_1A|} = 1.$$

10.18. (*Гиперболическая теорема Чевы.*) Пусть на сторонах BC , CA , AB треугольника ABC выбраны точки A_1 , B_1 , C_1 . Докажите, что отрезки AA_1 , BB_1 , CC_1 пересекаются в одной точке в точности тогда, когда выполнено одно из следующих двух равносильных условий:

$$\frac{\sin ACC_1}{\sin C_1CB} \cdot \frac{\sin BAA_1}{\sin A_1AC} \cdot \frac{\sin CBB_1}{\sin B_1BA} = 1, \quad \frac{\operatorname{sh}|AC_1|}{\operatorname{sh} C_1B} \cdot \frac{\operatorname{sh}|BA_1|}{\operatorname{sh}|A_1C|} \cdot \frac{\operatorname{sh}|CB_1|}{\operatorname{sh}|B_1A|} = 1.$$

Глава 11

История неевклидовой геометрии

В этой главе мы проследим историю создания неевклидовой геометрии Гауссом, Лобачевским и Бойяи (а также их предшественниками и последователями) и обсудим традиционный аксиоматический подход к основаниям геометрии. Рассказ начинается с «Начал» Евклида, первой блестящей попытки построить математику как дедуктивную науку (см. [14]).

§ 11.1. Пятый постулат Евклида

Древние греки осознали, что в дедуктивной науке, чтобы вывести (доказать) факты исходя из других фактов путем логического рассуждения, необходимо начать с фактов, которые не доказываются. Евклид называл эти факты *постулатами* (мы их называем *аксиомами*) и явно сформулировал пять из них. Кроме того, еще несколько аксиом он использовал неявно (не формулируя их). Несомненно, что Евклид, как и другие греческие математики, думал, что постулаты должны быть самоочевидны (просты и так ясны, чтобы не могло возникнуть сомнения в их истинности).

Однако последняя аксиома Евклида, *пятый постулат*, не проста и не очевидна. В современных терминах равносильное утверждение можно сформулировать так:

(V+) Для любой прямой и любой точки вне ее существует единственная прямая, параллельная данной прямой и проходящая через данную точку.

Здесь под прямой, параллельной данной, понимается прямая, не имеющая общих точек с данной. В формулировке Евклида утверждение было сложнее и менее очевидно:

(V) Если прямая пересекает две прямые и на одной ее стороне сумма внутренних углов меньше двух прямых углов, то указанные две прямые, продолженные до бесконечности, пересекаются на той стороне, где находятся углы с суммой меньше двух прямых углов.

Видимо, греческие математики (может быть, и сам Евклид) пытались вывести пятый постулат из других аксиом. В любом случае

в Евклидовых «Началах» применение пятого постулата откладывалось настолько возможно: в первый раз он появляется в доказательстве предложения 27 книги 1 (в этой книге 48 предложений, т. е. в нашей терминологии теорем). Возможно, заинтересовавшийся читатель захочет увидеть постулаты и теоремы из книги 1 Евклидовых «Начал»: они приведены в дополнении А к настоящей книге.

После Евклида в течение более чем двух тысяч лет многие ученые пытались доказать пятый постулат. И многие в этом «преуспели», обычно путем доказательства утверждений, равносильных пятому постулату, с использованием дополнительных аксиом, не сформулированных явно.

§ 11.2. Утверждения, равносильные пятому постулату

Мы уже упомянули одно такое утверждение, а именно (V+). Вот еще некоторые из них (в квадратных скобках мы указываем математика, который использовал данный подход для «доказательства» пятого постулата).

(1) *Сумма трех углов любого треугольника равна π (двум прямым углам, по терминологии Евклида).* [Это утверждение появляется в Евклидовых «Началах» как предложение 32 и было доказано с помощью пятого постулата; Лежандр дал в 1805 г. «доказательство» без использования пятого постулата.]

(2) *Прямая, пересекающая одну из параллельных прямых, пересекает и другую.* [Прокл, V век.]

(3) *Существуют подобные, но не конгруэнтные треугольники.* [Джон Валлис, 1663.]

(4) *Если в четырехугольнике три угла прямые, то четвертый угол тоже прямой.* [Насирэддин, XIII век; Саккери, 1679; Ламберт, 1776.] Впоследствии четырехугольник, в котором три угла прямые, а четвертый — нет, называли *четырёхугольником Саккери*.

Большинство математиков, пытавшихся доказать пятый постулат (включая упомянутых выше), рассуждали от противного. Как правило, они рассматривали два случая, предполагая, что сумма углов треугольника (а) больше, чем π или (б) меньше чем π (это равносильно тому, что четвертый угол четырехугольника Саккери больше (соответственно меньше) чем $\pi/2$ или что не существует (соответственно есть несколько) параллельных прямых к данной, проходящих через данную точку). В первом случае можно получить противоречие корректным рассуждением, использующим аксиомы Ев-

клида. Во втором случае противоречие не выводится, но стремление доказать пятый постулат было столь сильным, что математики, работавшие над этой проблемой, как правило, объявляли о получении доказательства, хотя в действительности оно содержало ошибку.

§ 11.3. Гаусс

Карл Фридрих Гаусс (1777—1855) впервые начал заниматься пятым постулатом в 1796 г., в возрасте 19 лет, и рассуждал от противного, как и его предшественники, но продвинулся гораздо дальше, развивая теорию в случае (б). Неясно, когда он пришел к заключению, что противоречие не появится. В знаменитом письме 1824 г. к своему другу Ф. А. Тауринусу он объяснил, что в случае $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ получается «совершенно непротиворечивая необычная геометрия», которую он назвал «неевклидовой». Он завершил свое письмо просьбой к Тауринусу никому не говорить о его «част-



КАРЛ ФРИДРИХ ГАУСС

ном сообщении», которое он предполагал опубликовать «когда-либо в будущем».

Позже, в 1832 г., он узнал от своего друга Фаркаша Бойяи, что сын последнего Янош пришел к тем же выводам. Затем в 1841 г. он обнаружил, что это сделал и Лобачевский. Гаусс даже выучил русский язык (чтобы прочесть раннюю работу Лобачевского?), но никогда по этим вопросам напрямую не общался ни с Яношем Бойяи, ни с Лобачевским.

Однако удивительнее всего, что Гаусс, когда он не думал о теории чисел или пятом постулате, построил дифференциальную геометрию поверхностей, в том числе поверхностей постоянной отрицательной кривизны, которые в действительности служат моделью гиперболической геометрии (по крайней мере локально). Все эти годы перед его глазами была эта модель, но он так и не обнаружил ее очевидную связь с неевклидовой геометрией. Он умер, не подозревая, что доказательство непротиворечивости гиперболической геометрии было у него в руках!

§ 11.4. Лобачевский

Николай Иванович Лобачевский (1793—1856), как и все остальные, попытался доказать пятый постулат от противного. Продвигаясь в исследовании случая $\alpha + \beta + \gamma < \pi$, он проникся убеждением, что теория непротиворечива. В неопубликованном учебнике, написанном в 1823 г., он отмечает, что все попытки доказать пятый постулат были ошибочны. В 1826 г. Лобачевский прочел доклад в Казани о «новой геометрии» (которую он позже назвал воображаемой) и опубликовал (на русском языке) мемуар о ней в «Казанском вестнике», не замеченный за рубежом. Пытаясь добиться признания, он опубликовал работы на немецком («*Geometrische Untersuchungen*», 1840) и французском («*Pangéométrie*», 1855) языках, но без успеха. Важнейшие работы Лобачевского по неевклидовой геометрии см. в [8, с. 27—70] и в [7, с. 137—217].

Н. И. Лобачевский был не только ректором Казанского университета, но и его главным библиотекарем. Казанская библиотека получала многие научные журналы, включая самый известный математический журнал того времени — «*Journal für die reine und angewandte Mathematik*», известный как журнал Крелля. Библиотечные карточки (дошедшие до нас) показывают, что Лобачевский



Николай Иванович Лобачевский

читал каждый выпуск журнала Крелля, который доходил в Казань, за исключением двух последовательных выпусков в 1830-е годы. Эти два выпуска содержали две статьи Миндлинга, в которых последний получил для поверхностей постоянной отрицательной кривизны тригонометрические формулы, идентичные тем, которые ранее получил Лобачевский для гиперболической плоскости. Если бы Лобачевский увидел какую-то из этих работ, он бы немедленно заметил, что там содержится доказательство непротиворечивости гиперболической геометрии!

§ 11.5. Бойяи

Янош Бойяи (1802—1860) был сыном математика Фаркаша Бойяи, который «доказал» пятый постулат (его друг Гаусс указал ему на ошибку). Вначале Янош последовал по стопам своего отца, пытаясь доказать пятый постулат от противного, но вскоре осознал, что он получил непротиворечивую геометрию. В 1823 г. он написал своему



Янош Бойяи

отцу: «Я создал странный новый мир из ничего». Но лишь в 1832 г. (через три года после Лобачевского) его исследования были опубликованы в добавлении к книге его отца «Tentamen» (и то и другое написано на латыни; русский перевод см. в [8, с. 71—100]).

Фаркаш послал книгу Гауссу с просьбой прокомментировать «Добавление». Вместо того чтобы похвалить и поддержать Яноша, Гаусс написал, что это значило бы «хвалить самого себя», поскольку он открыл то же самое тридцать лет назад и «Добавление» «избавило его от усилий» по изложению его открытия. Обескураженный, Янош Бойяи прекратил работу на несколько лет, но затем начал писать книгу, которая должна была содержать подробное изложение его результатов.

Когда Гаусс узнал о результатах Лобачевского, он «любезно» сообщил об этом Яношу Бойяи через его отца. Некоторое время Янош думал, что Лобачевский не существует, что он выдуман Гауссом, который использовал фамилию «Лобачевский» как псевдоним для публикации результатов, украденных из «Добавления» Я. Бойяи!

К счастью, Янош Бойяи в конце концов понял, что дело обстоит иначе, но он так и не закончил свою книгу и вообще ничего больше не опубликовал. Он умер довольно рано, не признанный своими современниками...

§ 11.6. Бельтрами, Гельмгольц, Ли, Кэли, Клейн и Пуанкаре

Первое доказательство непротиворечивости гиперболической геометрии приписывают Бельтрами, который показал (1868), что ее аксиомы и теоремы выполнены (по крайней мере локально) на поверхностях постоянной отрицательной кривизны. Физик Гельмгольц был, вероятно, первым, кто понял, как можно доказать непротиворечивость гиперболической геометрии, но математики считали его рассуждения недостаточно строгими. Софус Ли исправил рассуждения Гельмгольца и первым отметил важную роль групп преобразований в математике. Клейн дал определение геометрии, которое мы привели в гл. 1, и одновременно с Кэли (но независимо от него) дал элементарную глобальную модель гиперболической геометрии; кроме того, он придумал для трех геометрий названия *гиперболическая*, *параболическая*, *эллиптическая*. Пуанкаре построил две модели гиперболической геометрии, которые мы рассмотрели в главах 7 и 8.

§ 11.7. Гильберт

Давиду Гильберту принадлежит первая успешная попытка привести аксиоматическое построение евклидовой геометрии, строгое в современном смысле слова. Оно включает 21 аксиому, три неопределяемых понятия (*точка*, *прямая*, *плоскость*) и несколько неопределяемых отношений. Аксиомы Гильберта для геометрии плоскости рассматриваются в дополнении Б к настоящей книге.

В наше время аксиоматический подход редко используется при обучении геометрии, поскольку евклидову геометрию можно изложить гораздо проще: ее легко построить как ветвь линейной алгебры над полем вещественных чисел (основываясь на том, что прямая «изоморфна» числовой оси \mathbb{R}). Этот факт можно вывести из аксиом Гильберта, используя аксиоматическое определение вещественных чисел и проверяя, что соответствующие алгебраические аксиомы выполнены для точек любой прямой, если на ней подходящим образом ввести сложение и умножение.

Глава 12

Проективная геометрия

В этой главе мы введем основные понятия проективной геометрии для частного случая проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ и лишь кратко коснемся проективного пространства $\mathbb{R}P^3$. Общая теория d -мерного проективного пространства ($\mathbb{R}P^d$, $d \geq 1$) по традиции изучается в курсах линейной алгебры с помощью так называемых однородных координат, но мы остановимся на размерности $d = 3$. Наш подход более геометричен, что вначале может показаться странным, поскольку в нашей модели «точки» проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ — это прямые в евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 ; однако в итоге мы тоже обратимся к однородным координатам.

§ 12.1. Проективная плоскость как геометрия

12.1.1. Основное определение. *Проективная плоскость* $\mathbb{R}P^2$ — это, по определению, геометрия $(\mathbb{R}P^2 : \text{Proj}(2))$, элементы которой (называемые *проективными точками*) — прямые линии в пространстве \mathbb{R}^3 , проходящие через начало координат O , а группа преобразований $\text{Proj}(2)$ определяется следующим образом. Рассмотрим общую линейную группу $\text{GL}(3)$ и отождествим любые два линейных преобразования пространства \mathbb{R}^3 , матрицы которых получаются одна из другой умножением на ненулевую константу; на таких классах эквивалентности преобразований корректно определена композиция матриц, и $\text{Proj}(2)$ по определению есть группа, элементы которой — эти классы, а групповая операция — композиция (т. е. умножение матриц).

12.1.2. Точки и прямые. Элементы проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (проективные точки) — евклидовы прямые; тем не менее мы часто будем называть их просто *точками* (нашей геометрии). *Прямые линии* (нашей геометрии) определяются как (евклидовы) плоскости, проходящие через начало координат. Из этих определений непосредственно вытекают следующие два утверждения.

I. *Через любые две различные «точки» проходит одна и только одна «прямая».*

II. Любые две различные «прямые» пересекаются в одной и только одной «точке».

Таким образом, в нашей геометрии, как и в сферической, нет параллельных прямых. Но мы увидим, что эти геометрии сильно различаются; в частности, в проективной геометрии нет естественной метрики (а поэтому нет и угловой меры, перпендикуляров, площадей и т. д.). В отличие от сферической геометрии, в которой прямые пересекаются в двух точках, прямые в проективной геометрии пересекаются лишь в одной точке.

12.1.3. Интуитивное описание. Можно представлять себе проективную плоскость как евклидову плоскость, к которой добавлена «бесконечно удаленная прямая» Λ_∞ . Двигаясь по евклидовой прямой L до бесконечности в каком-то направлении, вы пересечете бесконечно удаленную прямую в некоторой точке $P = L \cap \Lambda_\infty$; если же двигаться вдоль L в противоположном направлении, вы достигнете прямой Λ_∞ и пересечете ее в той же самой точке P . Параллельные (в евклидовом смысле) прямые пересекаются на бесконечно удаленной прямой. Таким образом, прямые на плоскости $\mathbb{R}P^2$ — нечто вроде окружностей («бесконечные окружности»). Однако бесконечно удаленную прямую не следует считать «особенной», поскольку проективные преобразования в большинстве случаев переводят ее в «обычную» прямую. Приведенное здесь неформальное описание проективной плоскости мы сделаем строгим ниже, в п. 12.2.4.

§ 12.2. Однородные координаты

12.2.1. Вернемся к нашей геометрии ($\mathbb{R}P^2 : \text{Proj}(2)$) и введем координаты ее точек. Каждая точка L (т. е. каждая евклидова прямая, проходящая через начало координат) однозначно определяется своим направляющим вектором, т. е. тремя координатами (x_1, x_2, x_3) , в стандартном базисе пространства \mathbb{R}^3 , а именно в базисе

$$e_1 = (1; 0; 0), \quad e_2 = (0; 1; 0), \quad e_3 = (0; 0; 1).$$

Обратное, однако, неверно: точки не определяют координаты однозначно. А именно, если λ — вещественное число, не равное нулю, то $(\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ задает ту же точку, что и $(x_1; x_2; x_3)$. В этом случае мы называем два набора координат эквивалентными, обозначаем соответствующий класс эквивалентности через $(x_1 : x_2 : x_3)$ и называем $\chi(L) = (x_1 : x_2 : x_3)$ однородными координатами точки L .

12.2.2. Однородные координаты очень облегчают вычисление действия элементов $g \in \text{Proj}(2)$ на точки $L \in \mathbb{RP}^2$: преобразование g определяется (3×3) -матрицей $A_g \in \text{GL}(3)$ (заданной с точностью до умножения на ненулевую константу), причем

$$g(L) = A_g((x_1 : x_2 : x_3)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Геометрический смысл преобразования с матрицей A_g состоит в том, что ее столбцы являются образами векторов стандартного базиса при этом преобразовании, но, так как матрица A_g определена с точностью до ненулевого коэффициента, эти образы тоже определены с точностью до ненулевого коэффициента.

12.2.3. Проективные пространства высших размерностей. В курсах линейной алгебры *проективное пространство* \mathbb{RP}^d определяется аналогично в любой размерности d : его элементами являются однородные координаты $(x_0 : x_1 : \dots : x_d)$, т. е. классы эквивалентности, с точностью до ненулевого коэффициента, наборов из $d + 1$ вещественного числа $(x_0 : x_1 : \dots : x_d)$ (не все из которых равны нулю). Группа $\text{Proj}(d + 1)$ действует на каждый элемент как умножение на $(d + 1) \times (d + 1)$ -матрицы, соответствующие линейным операторам в пространстве \mathbb{R}^{d+1} (и определенные с точностью до ненулевого коэффициента). В этом курсе мы не будем изучать проективные пространства высших размерностей \mathbb{RP}^d , $d > 3$. Они подробно рассматриваются в большинстве курсов линейной алгебры. Однако ниже в §12.8 мы кратко рассмотрим проективное пространство \mathbb{RP}^3 .

12.2.4. Теперь опишем точную модель пространства \mathbb{RP}^2 , которая объяснит, почему оно называется проективной плоскостью. В пространстве \mathbb{R}^3 рассмотрим плоскость Π , заданную уравнением $x_3 = 1$. Точки этой плоскости имеют координаты вида $(x_1; x_2; 1)$. К плоскости Π добавим *бесконечно удаленную прямую* Λ_∞ ; ее точки — это классы эквивалентности евклидовых точек $(x_1; x_2; 0)$ относительно умножения на ненулевые константы (обозначение: $(x_1 : x_2 : 0)$). Множество $\Pi \cup \Lambda_\infty$ является множеством всех точек проективной плоскости.

Заметим, что «бесконечно удаленные точки» $(x_1 : x_2 : 0) \in \Lambda_\infty$ соответствуют евклидовым прямым на плоскости $x_3 = 0$. На интуитивном уровне можно представлять себе эти прямые «уходящи-

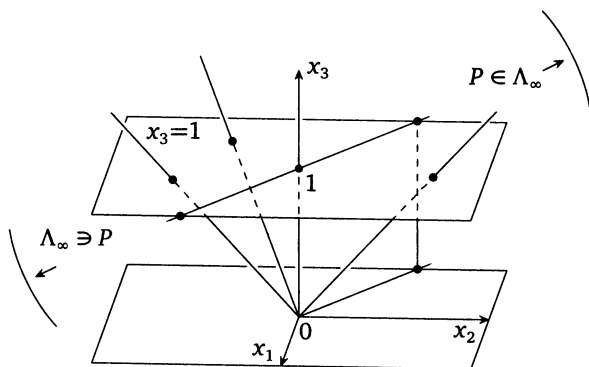


Рис. 12.1. Проективная плоскость

ми в бесконечность» в определенном направлении, так что множество Λ_∞ «окружает» плоскость Π . Уточним, что это не лучи, а обычные «двусторонние» прямые, поэтому они уходят в бесконечность в двух противоположных направлениях, но пересекают проективную прямую Λ_∞ лишь в одной точке (следует считать, что в этой точке отождествляются две диаметрально противоположные бесконечно удаленные точки). Читатель, знакомый с основами топологии, должен опознать здесь классическую топологическую модель проективной плоскости, полученную отождествлением диаметрально противоположных точек на границе единичного круга \mathbb{D}^2 .

Прямые в этой модели проективной плоскости — обычные прямые евклидовой плоскости плюс «прямая» Λ_∞ . Имеется очевидная биекция между точками и прямыми проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (определенной в предыдущем параграфе) и, соответственно, точками и прямыми в модели $\Pi \cup \Lambda_\infty$; в частности, прямая Λ_∞ соответствует (евклидовой) плоскости $x_3 = 0$. С помощью этой биекции легко задать действие группы $\text{Proj}(2)$ на этой модели.

§ 12.3. Проективные преобразования

12.3.1. Можно задать вопрос: почему наша геометрия называется «проективной», если она задана группой линейных операторов в пространстве \mathbb{R}^3 ? Попробуем ответить на этот вопрос. Пусть Π_1 и Π_2 — две плоскости в \mathbb{R}^3 , а $P \in \mathbb{R}^3$ — некоторая точка. *Проектированием* плоскости Π_1 на Π_2 из точки P называется отображение π , каждой точке $A \in \Pi_1$ ставящее в соответствие точку $A' \in \Pi_2$, в ко-

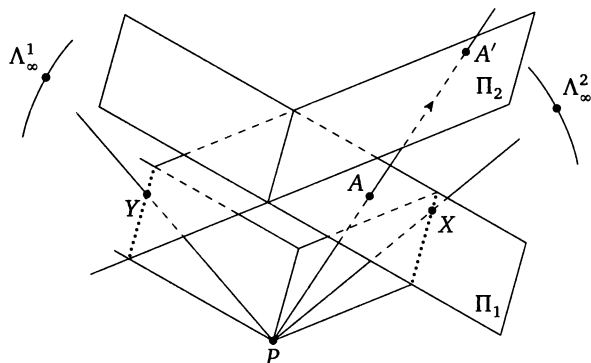


Рис. 12.2. Проективные преобразования плоскостей

торой прямая PA пересекает Π_2 . Это соответствие не обязательно биективно: π не определено в некоторых точках X (если прямая PX параллельна плоскости Π_2) и не сюръективно (некоторые точки на Π_2 не покрыты), см. рис. 12.2.

Однако если пополнить Π_1 и Π_2 бесконечно удаленными прямыми Λ_∞^1 и Λ_∞^2 и определить проектирование подходящим образом, то мы получим биекцию между проективными плоскостями $\Pi_1 \cup \Lambda_\infty^1$ и $\Pi_2 \cup \Lambda_\infty^2$. Подробности предоставляются читателю.

12.3.2. Мы говорим, что совокупность точек A_1, \dots, A_n , $n \geq 3$, проективной плоскости (интерпретируемой как модель из п. 12.2.4) находится в *общем положении*, если для любых трех из них A_k, A_l, A_m векторы $\overrightarrow{OA_k}, \overrightarrow{OA_l}, \overrightarrow{OA_m}$ составляют базис в \mathbb{R}^3 . Если одна из точек, скажем A_i , лежит на бесконечно удаленной прямой, то вектор $\overrightarrow{OA_i}$ корректно определен и в координатах имеет вид $(a : b : 0)$. Если три или больше точек из данной совокупности лежат на бесконечно удаленной прямой, то, разумеется, совокупность не находится в общем положении.

Равносильное определение: совокупность точек находится в общем положении, если никакие три из них не лежат на одной прямой.

Теорема 12.3.3. *Существует ровно одно проективное преобразование, отображающее четыре произвольные точки общего положения $A, B, C, D \in \mathbb{RP}^2$ в четыре другие произвольные точки общего положения $A', B', C', D' \in \mathbb{RP}^2$.*

Доказательство. В соответствии с нашей моделью проективной плоскости можно считать, что точки A, B, C и A', B', C лежат на

плоскости $x_3 = 1$. По предположению векторы \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} составляют базис пространства \mathbb{R}^3 . Пусть (a_1, a_2, a_3) , (b_1, b_2, b_3) , (c_1, c_2, c_3) — координаты векторов $\overrightarrow{OA'}$, $\overrightarrow{OB'}$, $\overrightarrow{OC'}$ в этом базисе. Тогда матрица

$$M = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{pmatrix}$$

соответствует линейному преобразованию пространства \mathbb{R}^3 , переводящему A, B, C в A', B', C' . Умножив ее столбцы на скалярные константы, получим матрицу

$$A_g = \begin{pmatrix} \lambda a_1 & \mu b_1 & \nu c_1 \\ \lambda a_2 & \mu b_2 & \nu c_2 \\ \lambda a_3 & \mu b_3 & \nu c_3 \end{pmatrix}$$

и будем считать, что она задает элемент g из $\text{Proj}(2)$. Ясно, что A_g переводит точки $A, B, C \in \mathbb{R}P^2$ в точки $A', B', C' \in \mathbb{R}P^2$, хотя та же матрица при действии в \mathbb{R}^3 не переводит $A, B, C \in \mathbb{R}^3$ в $A', B', C' \in \mathbb{R}^3$ (если не все три скаляра λ, μ, ν равны 1).

Теперь пусть (d_1, d_2, d_3) — координаты точки D в базисе \overrightarrow{OA} , \overrightarrow{OB} , \overrightarrow{OC} , а (d'_1, d'_2, d'_3) — координаты точки D' в том же базисе. Мы утверждаем, что можно так выбрать скалярные параметры λ, μ, ν , чтобы A_g переводило $D \in \mathbb{R}P^2$ в $D' \in \mathbb{R}P^2$.

В самом деле, это означает, что матрица A_g , примененная к вектору (d_1, d_2, d_3) , дает вектор (d'_1, d'_2, d'_3) , или, что то же самое, система уравнений

$$\begin{cases} a_1 d_1 \lambda + b_1 d_2 \mu + c_1 d_3 \nu = d'_1, \\ a_2 d_1 \lambda + b_2 d_2 \mu + c_2 d_3 \nu = d'_2, \\ a_3 d_1 \lambda + b_3 d_2 \mu + c_3 d_3 \nu = d'_3 \end{cases}$$

относительно неизвестных λ, μ, ν имеет решение. Но определитель этой системы равен $\Delta = d_1 d_2 d_3 \det(M)$ и, следовательно, не равен нулю. Поэтому наша система уравнений относительно λ, μ, ν имеет ненулевое решение. Тем самым мы показали, что $A_g(D) = D'$ (если в качестве λ, μ, ν взять решение нашей системы), и доказали существование нужного проективного преобразования.

Чтобы доказать его единственность, выполним построение матрицы A_g в обратном порядке, что возвращает нас к исходной матрице (с точностью до умножения на скаляр). □

§ 12.4. Двойное отношение коллинеарных точек

12.4.1. Основные определения. Выше мы отметили, что на проективной плоскости нет естественной метрики и нет аффинной структуры (нельзя корректно определить отношение двух отрезков, соединяющих три коллинеарные точки из \mathbb{RP}^2). Тем не менее наличие аффинной структуры в \mathbb{R}^3 позволяет определить двойное отношение любой упорядоченной четверки коллинеарных точек из \mathbb{RP}^2 .

Определение таково. Пусть k, l, m, n — коллинеарные точки в \mathbb{RP}^2 , т.е. четыре компланарные прямые в \mathbb{R}^3 , проходящие через начало координат, и пусть прямая s пересекает эти четыре прямые в точках A, B, C, D соответственно. Тогда векторы \overrightarrow{AC} и \overrightarrow{BD} пропорциональны, т.е. $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{BD}$; вещественное число λ (возможно, отрицательное) обозначается $\langle A, B, C \rangle$; величина $\langle A, B, D \rangle$ определяется аналогично. Положим теперь

$$\langle A, B, C, D \rangle := \frac{\langle A, B, C \rangle}{\langle A, B, D \rangle},$$

полученное число называется *двойным отношением* точек A, B, C, D . Нетрудно показать, что оно определено корректно, т.е. не зависит от выбора секущей s . Если теперь одна из точек, скажем B , лежит на бесконечно удаленной прямой Λ_∞ , то положим $\langle A, B, C, D \rangle := \langle C, D, A \rangle$ (аналогично в остальных случаях).

12.4.2. Выражение двойного отношения в координатах. Двойное отношение легко вычисляется в координатах. Для этого вернемся к модели

$$\Pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 1\} \subset \mathbb{RP}^2 = \Pi \cup \Lambda_\infty.$$

Пусть коллинеарные точки A, B, C, D имеют координаты

$$(x_A, y_A, 1), (x_B, y_B, 1), (x_C, y_C, 1), (x_D, y_D, 1).$$

Тогда, очевидно,

$$\langle A, B, C \rangle = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} = \frac{y_C - y_A}{y_C - y_B}, \quad \langle A, B, D \rangle = \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \frac{y_D - y_A}{y_D - y_B},$$

откуда

$$\langle A, B, C, D \rangle = \frac{x_C - x_A}{x_C - x_B} : \frac{x_D - x_A}{x_D - x_B} = \frac{y_C - y_A}{y_C - y_B} : \frac{y_D - y_A}{y_D - y_B}.$$

Если одна из точек, скажем B , лежит на бесконечно удаленной прямой (на ее пересечении с прямой, содержащей точки A, C, D), то

двойное отношение сводится к одной дроби. Происходящее в этом случае описывается словами «бесконечности сокращаются»:

$$\frac{x_C - x_A}{x_C - \infty} : \frac{x_D - x_A}{x_D - \infty} = \frac{x_C - x_A}{x_D - x_A} = \langle C, D, A \rangle.$$

В случае, когда все четыре точки A, B, C, D лежат на бесконечно удаленной прямой, их двойное отношение также является корректно определенным вещественным числом. Его вычислению посвящена задача 12.3.

Теорема 12.4.3. *Двойное отношение четырех коллинеарных точек инвариантно при проективных преобразованиях.*

Доказательство представляет собой упражнение по линейной алгебры; см. задачу 12.4. \square

§ 12.5. Проективная двойственность

12.5.1. Точки и прямые на проективной плоскости $(\mathbb{R}P^2 : \text{Proj}(2))$ играют в некотором смысле симметричную роль. Это легче увидеть, если ввести понятие *инцидентности*: будем говорить, что две прямые a и b *инцидентны в точке* P , если P — точка пересечения прямых a и b , и что две точки P и Q *инцидентны на прямой* a , если a проходит через P и Q . Кроме того, наряду со стандартным термином *коллинеарны* (для точек, лежащих на одной прямой), будем использовать термин *конкурентны* для прямых, проходящих через одну и ту же точку.

Любое утверждение проективной геометрии, сформулированное в этих терминах, можно превратить в другое утверждение, которое называется *двойственным* к первому, заменив слово «прямая» словом «точка» (а «коллинеарны» — на «конкурентны») и обратно. Например, утверждение I из п. 12.1.2 можно выразить следующим образом: «двум различным точкам инцидентна одна и только одна прямая»; новым утверждением (т. е. двойственным к нему) будет «двум различным прямым инцидентна одна и только одна точка», т. е. в точности утверждение II (см. п. 12.1.2). Другой пример: «любое проективное преобразование переводит коллинеарные точки в коллинеарные» превращается в «любое проективное преобразование переводит конкурентные прямые в конкурентные».

Замечательно, что такое преобразование всегда переводит истинные утверждения в истинные. Чтобы доказать это, определим *двойственную геометрию* для геометрии $\mathbb{R}P^2$: это геометрия $(D\mathbb{R}P^2 : \text{Proj}(2))$,

в которой *точками* являются плоскости в пространстве \mathbb{R}^3 , проходящие через начало координат, на которые действует группа невырожденных линейных преобразований пространства \mathbb{R}^3 . В геометрии $D\mathbb{R}P^2$ пересечение двух точек (т. е. евклидовых плоскостей) называется *прямой, проходящей через эти точки* (и это действительно евклидова прямая в евклидовом трехмерном пространстве).

Теорема 12.5.2. *Геометрии $(D\mathbb{R}P^2 : \text{Proj}(2))$ и $(\mathbb{R}P^2 : \text{Proj}(2))$ изоморфны: существует биекция, которая называется двойственностью и обозначается D , между множествами точек этих геометрий, согласованная с изоморфизмом группы $\text{GL}(3)$ на себя.*

Доказательство. Каждой «точке» Π геометрии $D\mathbb{R}P^2$, т. е. каждой плоскости в \mathbb{R}^3 , заданной уравнением вида $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$, поставим в соответствие точку $\mathbb{R}P^2$ с однородными координатами $(a_1 : a_2 : a_3)$ (это, разумеется, евклидова прямая, проходящая через начало координат перпендикулярно этой плоскости). Если элемент $g \in \text{Proj}(2)$ переводит точку $(a_1 : a_2 : a_3)$ в некоторую точку $(b_1 : b_2 : b_3)$, то этот же элемент переведет плоскость Π в плоскость с уравнением $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 = 0$. Таким образом, отображение двойственности $D : \mathbb{R}P^2 \rightarrow D\mathbb{R}P^2$ (заведомо биективное) согласовано с действием группы $\text{Proj}(2)$, так что мы построили требуемый изоморфизм. \square

Отметим, что соответствие двойственности является *инволюцией*, т. е. $D \circ D$ есть тождественное отображение проективной плоскости на себя. Отметим далее, что построенный выше изоморфизм сохраняет инцидентность: если две точки A, B в $\mathbb{R}P^2$ (т. е. две евклидовы прямые, проходящие через начало координат O в пространстве \mathbb{R}^3) инцидентны прямой l (т. е. содержатся в евклидовой плоскости Π_l), то две прямые $D(A), D(B)$ в $D\mathbb{R}P^2$ пересекаются в точке (геометрии $D\mathbb{R}P^2$) $D(l) = \Pi_l$. Таким образом, верно следующее утверждение.

Следствие 12.5.3 (принцип двойственности). *Существует биекция между множеством прямых и множеством точек проективной плоскости, которая сохраняет инцидентность и переводит любую теорему проективной геометрии в теорему проективной геометрии.*

§ 12.6. Коники в $\mathbb{R}P^2$

Невырожденные конические сечения (или кратко *коники*) на евклидовой плоскости — это, как известно, эллипс, гипербола и парабола. На проективной плоскости эти три кривые проективно эквивалентны, так что на проективной плоскости существует только

одна невырожденная коника (с точностью до проективной эквивалентности).

Коникку в \mathbb{RP}^2 можно определить как множество точек, которое при проективном преобразовании получается из кривой C , заданной уравнением $(x_1)^2 + (x_2)^2 = 1$ (в модели на пополненной евклидовой плоскости, описанной в § 12.2, эта кривая есть евклидова окружность). Любое проективное преобразование, при котором образ кривой C не пересекает бесконечно удаленную прямую Λ_∞ , переводит C в эллипс; проективное преобразование, переводящее одну точку кривой C на Λ_∞ , превращает C в параболу, а проективное преобразование, переводящее на Λ_∞ две точки кривой C , превращает C в гиперболу.

§ 12.7. Теоремы Паппа, Дезарга и Паскаля

Завершим наше изучение проективной плоскости \mathbb{RP}^2 тремя замечательными классическими теоремами. Все они могут рассматриваться как теоремы о точках и прямых либо на проективной, либо на аффинной (в частности, евклидовой) плоскости.

Теорема 12.7.1 (Дезарг). Пусть прямые, которые соединяют соответственные вершины треугольников $A_1A_2A_3$ и $B_1B_2B_3$, пересекаются в одной точке S . Тогда точки пересечения P_1, P_2, P_3 прямых A_2A_3 и B_2B_3 , A_3A_1 и B_3B_1 , A_1A_2 и B_1B_2 соответственно коллинеарны.

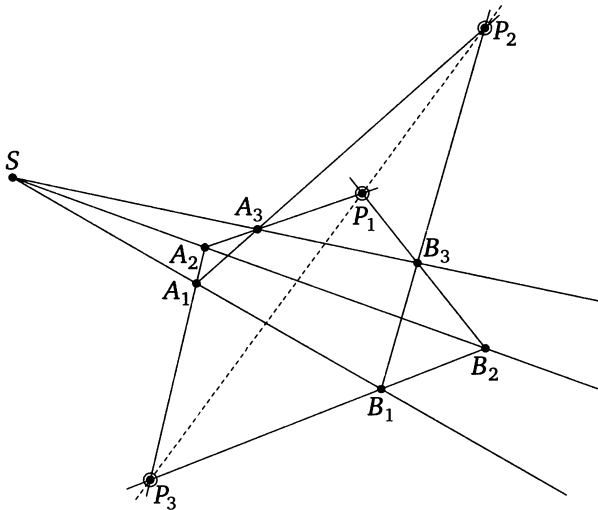


Рис. 12.3. Теорема Дезарга

Доказательство. Вначале перейдем с плоскости в трехмерное пространство и докажем трехмерный аналог теоремы Дезарга. (Доказательство трехмерной теоремы оказывается неожиданно простым, но использованное там рассуждение не работает на плоскости!) Затем применим трехмерную теорему, чтобы доказать теорему Дезарга на плоскости посредством непрерывной деформации пространственной картинке в плоскую.

Пусть даны два треугольника $A_1\hat{A}_2A_3$ и $B_1\hat{B}_2B_3$ в евклидовом пространстве \mathbb{R}^2 , причем три прямые A_1B_1 , $\hat{A}_2\hat{B}_2$, A_3B_3 пересекаются в одной точке S . (Читателю нужно представить себе, что точки A_1, B_1, A_3, B_3, S те же самые, что в плоском варианте теоремы, а точки A_2, B_2 «подняты» над плоскостью.) Тогда прямые SB_1 , $S\hat{B}_2$, SB_3 задают трехгранный угол в пространстве \mathbb{R}^3 (см. рис. 12.4).

Рассмотрим три пары прямых: \hat{A}_2A_3 и \hat{B}_2B_3 , \hat{A}_2A_1 и \hat{B}_2B_1 , A_1A_3 и B_1B_3 . Мы утверждаем, что каждая из этих пар имеет общую точку (в пространстве!) и эти три точки коллинеарны.

В самом деле, (евклидовы) плоскости $\Pi_1 := (A_1\hat{A}_2A_3)$ и $\Pi_2 := (B_1\hat{B}_2B_3)$ пересекаются по прямой Λ . Ясно, что прямые \hat{A}_2A_3 и \hat{B}_2B_3 пересекаются в точке (которую мы обозначим Q_1) на пря-

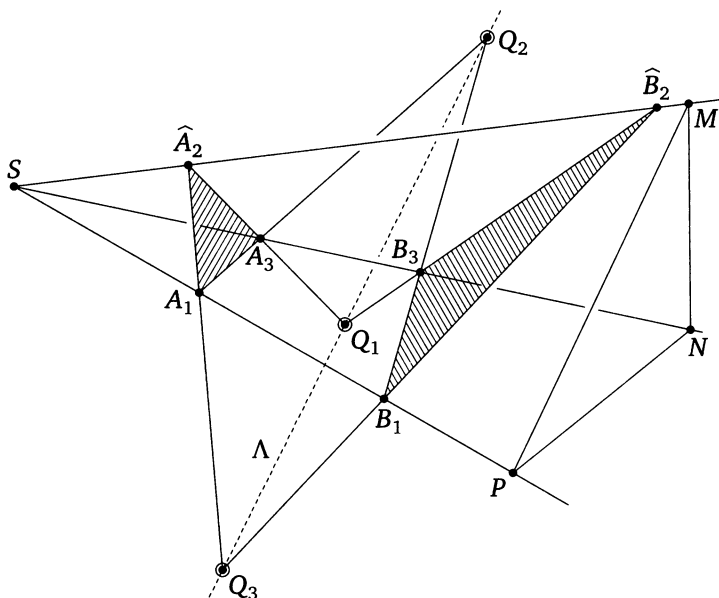


Рис. 12.4. Пространственная теорема Дезарга

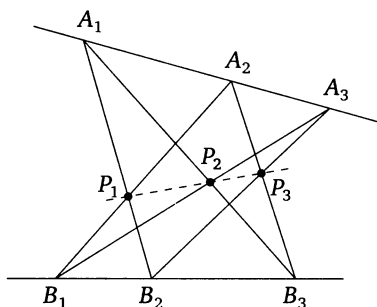


Рис. 12.6. Теорема Паппа

P_1, P_2, P_3 . Следовательно, эти три точки также коллинеарны, что доказывает теорему. \square

Теорема 12.7.2 (Папп). Пусть точки A_1, A_2, A_3 коллинеарны, точки B_1, B_2, B_3 также коллинеарны, P_1, P_2, P_3 — точки пересечения прямых A_2B_1 и A_1B_2 , A_1B_3 и A_3B_1 , A_2B_3 и A_3B_2 соответственно. Тогда точки P_1, P_2, P_3 коллинеарны.

Набросок доказательства. По теореме 12.3.3 можно считать, что $A_1A_2B_1B_2$ — квадрат. В системе координат с базисом $\overrightarrow{A_1A_2}, \overrightarrow{A_1B_1}$ легко показать, что точки P_1, P_2, P_3 коллинеарны.

Теорема 12.7.3 (Паскаль). Пусть точки A, B, C, D, E, F лежат на конике, и пусть P_1, P_2, P_3 — точки пересечения прямых AB и ED , AF и CD , CB и EF соответственно. Тогда точки P_1, P_2, P_3 коллинеарны.

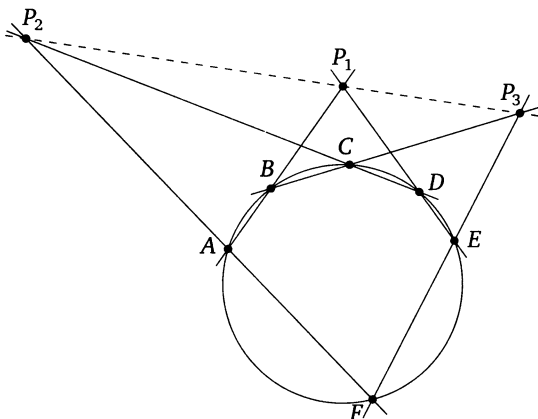


Рис. 12.7. Теорема Паскаля

Теорему иллюстрирует рис. 12.7, где коника является окружностью. На самом деле Паскаль доказал теорему именно для этого частного случая, но без всякой потери общности — он знал, что все коники проективно эквивалентны окружности. Мы не приводим здесь (не очень трудное) доказательство его теоремы.

Замечание 12.7.4. Отметим, что теорема верна и для $\mathbb{R}P^2$, и для \mathbb{R}^2 . Чтобы сформулировать ее в полной общности для евклидовой плоскости, нужно рассмотреть несколько особых случаев (которые возникают, когда одна из точек P_i «уходит на бесконечность»); в этих случаях доказательство несколько отличается от общего случая. Отметим также, что евклидовы случаи имеют доказательства в метрических терминах (см. задачу 12.13), но проективное доказательство в некотором смысле более естественно. Аналогичные замечания верны для теорем Паппа и Дезарга.

§ 12.8. Проективное пространство $\mathbb{R}P^3$

В этом параграфе мы очень кратко рассмотрим трехмерную проективную геометрию.

12.8.1. Определение проективного пространства. Как изложено в п. 12.2.3, проективное пространство $\mathbb{R}P^3$ можно определить в терминах однородных координат, но здесь мы последуем более геометричному подходу. А именно, рассмотрим четырехмерное евклидово пространство \mathbb{R}^4 и в качестве точек пространства $\mathbb{R}P^3$ возьмем прямые, проходящие через начало координат O в \mathbb{R}^4 . Группу преобразований $\text{Proj}(3)$ пространства $\mathbb{R}P^3$ определим, как в двумерном случае (заменяв $\text{GL}(3)$ на $\text{GL}(4)$). Теперь определим прямые в $\mathbb{R}P^3$ как плоскости, проходящие через начало координат O , а плоскости в $\mathbb{R}P^3$ — как трехмерные гиперплоскости в \mathbb{R}^4 , проходящие через O .

Следующие важнейшие факты непосредственно вытекают из этих определений.

I. *Через любые две различные «точки» проходит ровно одна «прямая».*

II. *Любые две различные «плоскости» пересекаются по одной и только одной «прямой».*

Таким образом, в этой геометрии нет параллельных прямых и параллельных плоскостей. Более того, в $\mathbb{R}P^3$ нет и функции расстояния, а потому нет мер площадей и углов, а также перпендикуляров.

12.8.2. Свойства проективных преобразований. Не входя в подробности, заметим лишь, что справедлива «теорема о пяти точках», аналогичная «теореме о четырех точках» 12.3.3, и что двойное отношение четырех коллинеарных точек инвариантно относительно проективных преобразований. Существует изящная теория квадрик (поверхностей, заданных уравнениями второй степени), в которой, например, доказывается, что двуполостный гиперболоид (проективно) эквивалентен однополостному гиперболоиду и эллипсоиду.

12.8.3. Проективная двойственность в пространстве. Как и на проективной плоскости, в \mathbb{RP}^3 действует принцип двойственности, но несколько более сложный: он затрагивает не только точки и прямые, но и плоскости. Заменяя выражения «проходит через», «пересекаются в» и т. д. подходящими вариантами понятия инцидентности и используя выражения «конкуррентны» и «компланарны» в формулировке какой-либо теоремы, мы получим двойственную теорему, просто меняя местами слова «точка» и «плоскость» (и оставляя на месте слово «прямая», оно самодвойственно). Двойственная теорема также верна, поскольку ее доказательство можно получить, «дуализируя» доказательство исходной теоремы. Например, свойства I и II двойственны друг другу.

§ 12.9. Задачи

12.1. Даны пять различных коллинеарных точек A, B, C, D, E . Докажите, что

$$\langle A, B, C, D \rangle \cdot \langle A, B, D, E \rangle \cdot \langle A, B, E, C \rangle = 1.$$

12.2. Сколько различных значений принимает двойное отношение четырех точек на прямой, когда меняется их порядок?

12.3. Вычислите двойное отношение четырех точек $(x_i : y_i; 0)$, $i = 1, 2, 3, 4$, лежащих на бесконечно удаленной прямой Λ_∞ .

12.4. Докажите теорему 12.4.3.

12.5. Четыре плоскости проходят через общую прямую l , а прямая m пересекает все четыре плоскости. Докажите, что двойное отношение точек пересечения прямой m с этими плоскостями не зависит от выбора m .

12.6. Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Паппа. Сделайте соответствующий чертеж.

12.7. Сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Дезарга. Сделайте соответствующий чертеж.

12.8* Докажите, что проективная двойственность переводит любую точку коники в прямую, касательную к двойственной конике.

12.9. Используя задачу 12.8, сформулируйте и докажите теорему, двойственную теореме Паскаля (она известна как *теорема Брианшона*). Сделайте соответствующий чертеж.

12.10. В пространстве \mathbb{R}^3 даны три скрещивающиеся прямые l, l_1, l_2 . Каждой точке $A_1 \in l_1$ поставим в соответствие точку A_2 , в которой прямая l_2 пересекает плоскость, содержащую A_1 и l . Докажите, что соответствие $A_1 \mapsto A_2$ является проективным отображением прямой l_1 на l_2 .

12.11. На плоскости даны прямые l_1, \dots, l_{n-1} и l . На прямой l выбраны точки O_1, \dots, O_n . Известно, что если точки A_1, \dots, A_{n-1} движутся по прямым l_1, \dots, l_{n-1} , то прямые, содержащие стороны многоугольника $A_1 \dots A_n$, проходят через точки O_1, \dots, O_n . Докажите, что вершина A_n также движется по прямой.

12.12. Докажите неравенство треугольника для гиперболической метрики, используя подходящие проективные преобразования.

12.13. Докажите евклидов вариант теоремы Паскаля для случая окружности.

Глава 13

«Проективная геометрия — это вся геометрия»

Заголовок этой главы — цитата из Артура Кэли, выдающегося британского математика XIX столетия, одного из создателей проективной геометрии. Цель этой главы — придать его словам точный математический смысл, а именно показать, что три основные непрерывные геометрии: параболическая (Евклид), гиперболическая (Лобачевский) и эллиптическая (Риман) — являются *подгеометриями* проективной геометрии. Мы докажем это в размерности два, т. е. покажем, что проективная плоскость «содержит» (в некотором точном смысле) гиперболическую, эллиптическую и евклидову плоскость. Поскольку дискретные геометрии, которые мы также изучали в этой книге, являются в свою очередь подгеометриями трех основных непрерывных геометрий, это означает, что все геометрии, изучавшиеся до сих пор в нашем курсе, являются частями проективной геометрии.

Но прежде всего напомним понятие подгеометрии, кратко упомянутое в гл. 1.

§ 13.1. Подгеометрии

13.1.1. Напомним, что две геометрии $(X : G)$ и $(Y : H)$ изоморфны, если между ними существует эквивариантная биекция, т. е. биекция между множествами их точек, и существует согласованный с ней изоморфизм между их группами преобразований (подробное определение см. в гл. 1). Далее, геометрия $(X : G)$ является *подгеометрией* геометрии $(Y : H)$, если существуют инъективное отображение $i : X \rightarrow Y$ и мономорфизм $\gamma : G \rightarrow H$, согласованные с действием групп, т. е. удовлетворяющие условию $(i(x))(\gamma(g)) = i(xg)$. (В этой формуле через xg обозначается результат действия элемента $g \in G$ на точку $x \in X$; соответственно $(i(x))(\gamma(g))$ обозначает результат действия элемента $\gamma(g) \in H$ на точку $i(x) \in Y$.)

Разумеется, любая геометрия, изоморфная данной, является ее подгеометрией, но нас интересует случай, когда это *собственная*

подгеометрия, т. е. когда i не является биекцией, или γ не является изоморфизмом, или и то и другое.

13.1.2. Вот некоторые простейшие примеры собственных подгеометрий:

- группа движений правильного двенадцатиугольника является подгеометрией додекаэдра, на котором действует группа диэдра \mathbb{D}_{12} ;
- группа диэдра \mathbb{D}_6 , действующая на правильном додекаэдре, задает подгеометрию этого же додекаэдра с действием группы диэдра \mathbb{D}_{12} ;
- группа диэдра \mathbb{D}_6 , действующая на правильном додекаэдре, задает подгеометрию евклидовой планиметрии ($\mathbb{R}^2: \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$).

§ 13.2. Евклидова плоскость как подгеометрия проективной

13.2.1. Тот факт, что евклидова плоскость ($\mathbb{R}^2: \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$) является подгеометрией проективной плоскости ($\mathbb{R}P^2: \text{Proj}(2)$), довольно очевиден, если интерпретировать $\mathbb{R}P^2$ (в модели однородных координат, см. § 12.2) как плоскость

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\},$$

пополненную «бесконечно удаленной прямой»

$$\Lambda_\infty = \{(x_1 : x_2 : x_3) : x_3 = 0\},$$

т. е. если положить $\mathbb{R}P^2 = \Pi \cup \Lambda_\infty$.

Действительно, определим отображение $i: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2 = \Pi \cup \Lambda_\infty$ очевидным образом, т. е. положив $i((x_1, x_2)) := (x_1, x_2, 1)$, а отобра-

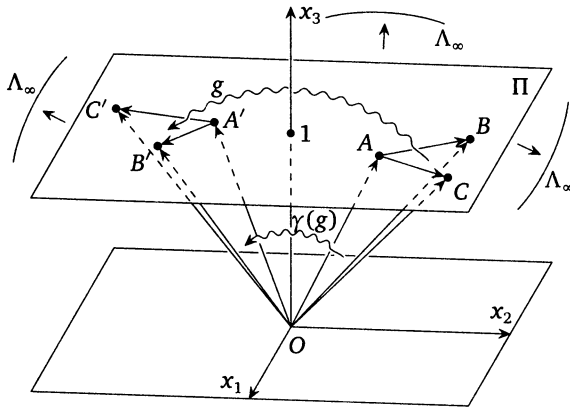


Рис. 13.1. Евклидова плоскость как подгеометрия проективной

жение $\gamma: \text{Isom}(\mathbb{R}^2) \rightarrow \text{GL}(3)$ определим следующим образом. Пусть $g \in \text{Isom}(\mathbb{R}^2)$, $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ — ортонормированный репер на плоскости, $(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'})$ — его образ при отображении g . В качестве $\gamma(g)$ возьмем элемент из $\text{Proj}(2)$, переводящий три прямые OA, OB, OC в прямые OA', OB', OC' . Эта конструкция показана на рис. 13.1.

Теорема 13.2.2. *Вышеописанная конструкция показывает, что евклидова плоскость — подгеометрия проективной.*

Доказательство. Теорема очевидна: ясно, что i взаимно однозначно, γ является мономорфизмом и они согласованы. \square

§ 13.3. Гиперболическая плоскость как подгеометрия проективной

13.3.1. Тот факт, что гиперболическая плоскость $(\mathbb{L}^2 : M)$ является подгеометрией проективной плоскости $(\mathbb{R}P^2 : \text{Proj}(2))$, лучше всего виден, если использовать модель Кэли—Клейна и интерпретировать $\mathbb{R}P^2$ (как и выше в § 12.2) как плоскость

$$\Pi = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_3 = 1\},$$

пополненную «бесконечно удаленной прямой»

$$\Lambda_\infty = \{(x_1 : x_2 : x_3) : x_3 = 0\},$$

т. е. положить $\mathbb{R}P^2 = \Pi \cup \Lambda_\infty$.

Напомним, что модель Кэли—Клейна была определена как $(\mathbb{L}^2 : \text{Isom}_\lambda(\mathbb{L}^2))$, где \mathbb{L}^2 — открытый единичный круг, а λ — метрика, заданная формулой $\lambda(A, B) = (1/2)|\ln(\langle A, B, X, Y \rangle)|$ (подробности см. в § 9.2).

Теперь определим отображение $i: \mathbb{L}^2 \rightarrow \mathbb{R}P^2 = \Pi \cup \Lambda_\infty$ очевидным образом, т. е. положив $i((x_1, x_2)) := (x_1, x_2, 1)$, а отображение $\gamma: \text{Isom}_\lambda(\mathbb{L}^2) \rightarrow \text{Proj}(2)$ зададим следующим образом. Пусть $g \in \text{Isom}_\lambda(\mathbb{L}^2)$. Возьмем четыре точки общего положения $A, B, C, D \in \mathbb{L}^2$ и рассмотрим их образы $Ag, Bg, Cg, Dg \in \mathbb{L}^2$ при действии элемента g . Положим

$$A_1 = i(A), \quad B_1 = i(B), \quad C_1 = i(C), \quad D_1 = i(D) \in \mathbb{L}^2,$$

$$A_2 = i(Ag), \quad B_2 = i(Bg), \quad C_2 = i(Cg), \quad D_2 = i(Dg) \in \mathbb{L}^2.$$

Две четверки точек $A_i, B_i, C_i, D_i \in \Pi$, $i = 1, 2$, находятся в общем положении, и по теореме 12.3.3 существует единственное проективное преобразование, переводящее A_1, B_1, C_1, D_1 в A_2, B_2, C_2, D_2 ; это преобразование мы возьмем в качестве $\gamma(g)$. Конструкция показана на рис. 13.2.

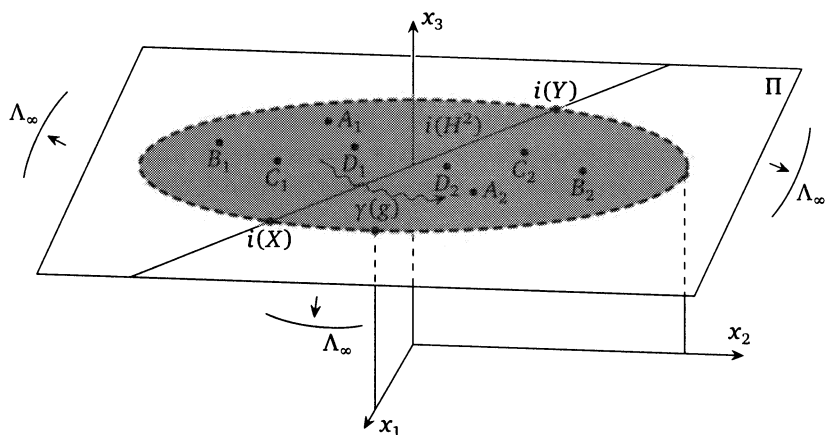


Рис. 13.2. Модель Кэли—Клейна как подгеометрия проективной плоскости

По существу эта конструкция — всего лишь естественное продолжение действия элемента g с открытого единичного круга

$$\{(x_1, x_2, 1) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} = i(\mathbb{L}^2)$$

на всю проективную плоскость. Каждой «прямой» на \mathbb{L}^2 (т.е. каждой хорде XY единичной окружности) соответствует прямая, соединяющая точки $i(X)$, $i(Y)$ на проективной плоскости; параллельным или расходящимся прямым на \mathbb{L}^2 (хордам единичного круга) соответствуют прямые на $\mathbb{R}P^2$, которые на самом деле пересекаются (в точке вне круга $i(\mathbb{L}^2)$, возможно, на бесконечно удаленной прямой Λ_∞).

Теорема 13.3.2. *Вышеописанная конструкция показывает, что гиперболическая плоскость является подгеометрией проективной плоскости.*

Доказательство. Ясно, что отображение i взаимно однозначно, так что остается показать, что ограничение отображения $\gamma(g)$ на открытый круг $\{(x_1, x_2, 1) : x_1^2 + x_2^2 < 1\} = i(\mathbb{L}^2)$ совпадает с γ . Это следует из того факта, что проективные преобразования сохраняют двойное отношение любых четырех коллинеарных точек и потому сохраняют расстояние λ между точками внутри $i(\mathbb{L}^2)$ (где λ — абсолютная величина логарифма соответствующего двойного отношения). Но g является изометрией (относительно λ), оно совпадает с ограничением отображения $\gamma(g)$ на $i(\mathbb{L}^2)$ на трех неколлинеарных точках и потому совпадает с ним на всей гиперболической плоскости. \square

Замечание 13.3.3. Не сложно доказать, что подгруппа группы $\text{Proj}(2)$, которая переводит в себя окружность $\{(x_1, x_2, 1) : x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, в действительности изоморфна группе $\text{Isom}_\lambda(\mathbb{H}^2)$; с помощью этого изоморфизма часто доказывается в различных формулировках, что гиперболическая плоскость — «часть» проективной плоскости. При нашем подходе этот факт не потребуется, поэтому опустим доказательство.

§ 13.4. Риманова эллиптическая плоскость как подгеометрия проективной плоскости

13.4.1. Как и в двух предыдущих параграфах, рассмотрим \mathbb{RP}^2 как плоскость Π , пополненную бесконечно удаленной прямой Λ_∞ . Будем использовать стандартную модель римановой двумерной эллиптической геометрии \mathbb{E}^2 , т. е. единичную сферу с отождествленными противоположными точками: $\mathbb{E}^2 = (\mathbb{S}^2 / \text{Ant} : \text{O}(3))$. Мы считаем, что сфера лежит на плоскости Π , касаясь ее в точке $(0, 0, 1)$.

Сначала построим вложение (на самом деле биекцию) $\mathbb{S}^2 / \text{Ant}$ в \mathbb{RP}^2 , просто спроектировав $\mathbb{S}^2 / \text{Ant}$ из центра сферы на $\Pi \cup \Lambda_\infty$. Заметим, что «прямые» на $\mathbb{S}^2 / \text{Ant}$ (т. е. большие окружности сферы с отождествленными диаметрально противоположными точками) отобразятся в прямые на проективной плоскости. В частности, экватор сферы отобразится на «бесконечно удаленную прямую» Λ_∞ . Заметим также, что сферические треугольники (не пересекающие экватор) спроектируются на обычные прямолинейные треугольники на плоскости, но величины их углов не сохраняются.

Чтобы построить мономорфизм $\gamma : \text{O}(3) \rightarrow \text{Proj}(2)$, возьмем две перпендикулярные дуги AB и AC (не пересекающие экватор), и пусть BCD — треугольник, симметричный треугольнику ABC относительно прямой BC . Пусть A_1, B_1, C_1, D_1 — центральные проекции точек A, B, C, D на плоскость Π . Далее, пусть $g \in \text{O}(3)$ переводит точки A, B, C, D в A', B', C', D' , а A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 — их проекции на Π . Определим $\gamma(g)$ как проективное преобразование, переводящее A', B', C', D' в A'_1, B'_1, C'_1, D'_1 (такая проекция существует и единственна по теореме 12.3.3). Конструкция показана на рис. 13.3.

Теорема 13.4.2. *Вышеописанная конструкция показывает, что риманова эллиптическая плоскость является подгеометрией проективной плоскости.*

Доказательство. Теорема легко вытекает из следующей леммы, доказательство которой составляет задачу 13.3.

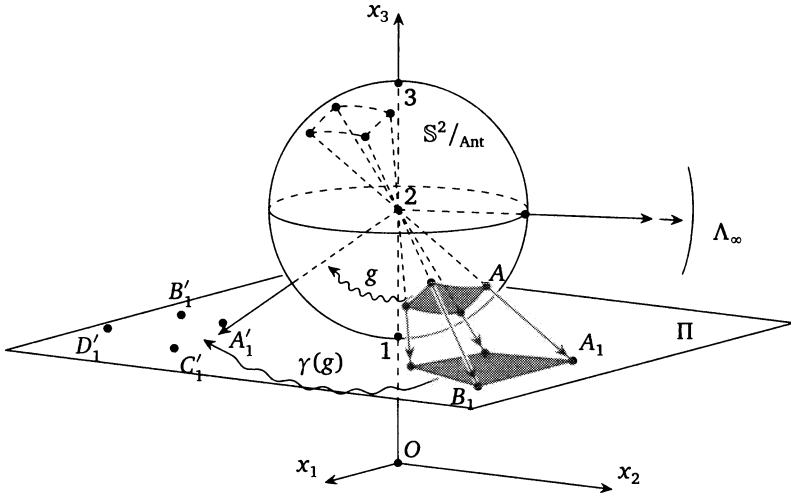


Рис. 13.3. Биекция между эллиптической и проективной плоскостями

Лемма 13.4.3. *Отображение γ , описанное выше, является мономорфизмом группы $O(3)$ в $\text{Proj}(2)$.*

Мономорфизм γ согласован с отображением i по построению, откуда и следует теорема. \square

§ 13.5. Задачи

13.1. Докажите, что любое проективное преобразование проективной плоскости \mathbb{RP}^2 сохраняет двойное отношение коллинеарных точек.

13.2. Докажите, что, обратно, любое преобразование проективной плоскости, сохраняющее двойное отношение любых коллинеарных точек, является проективным.

13.3. Докажите лемму 13.4.3.

13.4. Приведите пример сферического треугольника, у которого сумма углов близка к 2π , и опишите его образ при центральном проектировании из центра сферы.

13.5. Покажите, что для любого $\varepsilon > 0$ и любого положительного числа S существует такой сферический треугольник, что его площадь меньше ε , а площадь его образа при центральном проектировании, указанном в § 13.4, больше S .

13.6. Докажите, что подгруппа, состоящая из проективных преобразований, отображающих в себя единичную окружность с цен-

тром в начале координат, изоморфна группе изометрий гиперболической плоскости.

13.7. Обобщите и решите предыдущую задачу, заменив окружность на произвольный овал (невырожденную кривую второй степени).

Глава 14

Конечные геометрии

Конечная геометрия — это геометрия, множество точек которой конечно. В этой ситуации варианты группы преобразований крайне разнообразны, а данное Клейном определение слишком широко и не позволяет выделить те конечные геометрии, которые действительно заслуживают названия «геометрия». Поэтому нужно наложить ограничения на рассматриваемые действия групп, и это делается с помощью координат в линейных пространствах над конечными полями. При другом подходе вводится понятие «прямой линии» и накладываются условия (аксиомы), которые делают геометрии в каком-то смысле «проективными» или «аффинными».

К сожалению, эти два подхода не эквивалентны: при аксиоматическом подходе класс конечных плоскостей шире, чем при координатно-алгебраическом. Однако, оказывается, два подхода эквивалентны в точности тогда, когда в рассматриваемой конечной геометрии выполнена теорема Дезарга.

Следует заметить, что некоторые важнейшие естественные вопросы относительно конечных геометрий до сих пор не получили ответа, и эти геометрии являются предметом продолжающегося активного изучения. Некоторые из этих вопросов и относящиеся к ним гипотезы упомянуты в § 14.11.

§ 14.1. Малые конечные геометрии

В этом параграфе мы займемся классификацией всех геометрий с «малым» количеством точек. Под классификацией мы понимаем перечисление (без повторений) всех геометрий с данным количеством точек $k := |X|$ с точностью до изоморфизма. Напомним, что две геометрии изоморфны, если между ними существует эквивариантная биекция, т. е. биекция между их множествами точек и согласованный с ней изоморфизм между их группами преобразований (подробное определение см. в гл. 1).

Разумеется, геометрия с одной точкой только одна. При $|X| = 2$ существует две геометрии (с $|G| = 2$ и с $|G| = 1$). При $|X| = 3$ су-

существует три геометрии: изометрии вершин равностороннего треугольника ($G = S_3$), движения вершин равностороннего треугольника ($G = \mathbb{Z}_3$), «осевые симметрии» вершин равнобедренного треугольника ($G = \mathbb{Z}_2$). При $|X| = 4$ есть десять геометрий: симметрии правильного тетраэдра, его движения, симметрии квадрата, его движения, повороты квадрата на углы 0 и π , симметрии ромба и еще четыре геометрии, которые получаются, если группа преобразований имеет неподвижную точку (одну и ту же для всех элементов).

При $|X| \geq 5$ ситуация становится труднообозримой, а при $|X| \geq 10$ даже суперкомпьютер бессилен.

Чтобы продолжить наше исследование, нужно выделить разумные классы конечных геометрий. Для этого потребуется немного алгебры.

§ 14.2. Конечные поля

Современной логической основой обычной евклидовой аффинной геометрии является понятие векторного пространства над полем вещественных чисел. Чтобы построить нечто подобное в конечном случае, потребуются конечные поля.

Теорема 14.2.1. Для любого $q = p^m$, где p — простое число, m — целое положительное число, существует ровно одно (с точностью до изоморфизма) поле, состоящее из q элементов. Оно называется конечным полем порядка q и обозначается $F(q)$. Других конечных полей не существует.

Мы не даем доказательство этой теоремы (оно относится к курсу алгебры) и лишь приведем простейший нетривиальный пример — таблицы сложения и умножения для поля $F(4) = \{0, 1, 2, 3\}$:

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	0	3	2
2	2	3	0	1
3	3	2	1	0

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	3	1
3	0	3	1	2

Чтобы составить представление о структуре полей $F(q)$, предлагаем читателю построить таблицы сложения и умножения, скажем, для $F(3^2)$.

§ 14.3. Пример: конечная аффинная плоскость над $F(5)$

В этом параграфе мы построим конечную аффинную двумерную геометрию над конечным полем $F(p)$, где p — простое число (т. е. в случае $m=1$). Чтобы сделать построение более конкретным, проведем его для $p=5$, хотя оно пригодно при любом простом p .

14.3.1. Определим аффинную плоскость $AF(5)$ порядка 5 как множество $\{(x, y) | x \in F(5), y \in F(5)\}$, состоящее из пар (координат точек). Как и в обычной евклидовой геометрии, две точки $T = (a, b)$, $S = (c, d)$ задают вектор $\overrightarrow{TS} = \{c - a, d - b\}$. Определим прямые, как в аналитической геометрии, т. е. положив $A(t) = A_0 + t\vec{v}$, где A_0 — точка, \vec{v} — вектор, а t пробегает $F(5)$. Например, если взять $A_0 = (0; 0)$ и $\vec{v} = (1; 2)$, получаем «прямую»

$$\{(0; 0), (1; 2), (2; 4), (3; 1), (4; 3)\}.$$

В итоге получается 30 прямых, 25 точек, 5 точек на каждой прямой и 6 прямых, проходящих через каждую точку. На рис. 14.1 показаны шесть прямых, проходящих через точку $(0; 0)$.

Рассуждая точно так же в общем случае, получаем $p^2 + p$ прямых, p^2 точек, p точек на каждой прямой и $p + 1$ прямых, проходящих через каждую точку.

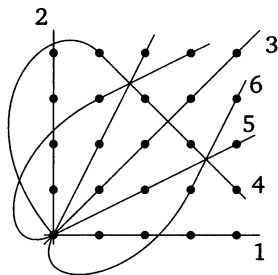


Рис. 14.1. Шесть прямых на $AF(5)$

14.3.2. Тот же результат можно получить, используя пространство орбит соответствующей геометрии. Пусть $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \subset \mathbb{R}^2$ — целочисленная решетка на плоскости, а $(\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} : G)$ — геометрия, заданная группой преобразований G , изоморфной группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$, которая действует сдвигами по координатам на 5:

$$G \ni (k, l) : (m, n) \mapsto (m + 5k, n + 5l).$$

Пространство орбит такого действия состоит из 25 «точек». отождествим их с 25 точками решетки, имеющими неотрицательные координаты, меньшие чем 5. «Прямая», проходящая через две точки этого квадрата 5×5 , определяется следующим образом: построим на евклидовой плоскости прямую, соединяющую эти две точки, возьмем все целые точки этой прямой и рассмотрим обе их координаты

по модулю 5, получив еще три точки в квадрате; вместе с двумя данными точками они составляют «прямую».

Геометрически можно представить это как накрытие тора плоскостью: при таком отображении точки квадратной решетки «намаываются» на 25 точек тора.

§ 14.4. Пример: конечная аффинная плоскость над $F(2^2)$

Теперь займемся построениями над полем $F(2^2)$. Определим *аффинную плоскость* над $F(4)$ как множество $\{(x, y) : x \in F, y \in F\}$ пар (координат точек). Используя тот же подход, что в § 14.3 (включая «векторное определение» прямых), попробуем построить прямую, проходящую через точку $(0; 0)$, с направляющим вектором $\{1; 1\}$. Поскольку $(1; 1) + \{1; 1\} = (0; 0)$, эта прямая содержит только две точки: $(0; 0)$ и $(1; 1)$. Тем самым координатный подход для $\mathbb{F}(4)$ не работает.

Тем не менее, на множестве точек P можно построить разумную аффинную геометрию с четырьмя точками на каждой прямой, определив прямые иначе. В частности, прямая, проходящая через точки $(0; 0)$, $(1; 2)$, должна содержать еще две точки $((2; 3)$ и $(3; 1))$, а прямая, проходящая через $(0; 0)$ и $(1; 2)$, содержит точки $(2; 3)$ и $(3; 1)$. В этой геометрии существуют $16 = q^2$ точек, $20 = q^2 + q$ прямых, $4 = q$ точек на каждой прямой и $5 = q + 1$ прямых проходят через каждую точку. На рис. 14.2 показаны пять прямых, проходящих через точку $(0; 0)$.

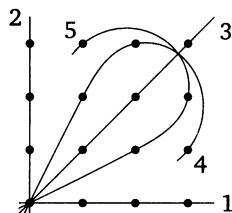


Рис. 14.2. Пять прямых на $AF(4)$

В результате получается геометрия, которая называется *конечной аффинной плоскостью* над полем $F(4)$ и обозначается $AF(4)$. Множество $AF(4)$ действительно является геометрией в смысле Клейна $(AF(4) : \Gamma)$, если в качестве группы преобразований Γ взять множество всех биекций множества $AF(4)$, переводящих прямые в прямые.

В общем случае, т. е. при $F = F(q)$, $q = p^m$, $m > 1$, где p простое, также можно построить конечную аффинную плоскость $AF(q)$, но прямое построение довольно громоздко, и мы его опустим. Однако в § 14.8 мы дадим изящную косвенную конструкцию с помощью конечных проективных геометрий.

Прежде всего приведем пример конечной проективной геометрии.

§ 14.5. Пример конечной проективной плоскости

14.5.1. Пусть $AF(4)$ — конечная аффинная плоскость при $q = 2^2$. Мы говорим, что две прямые на $AF(4)$ *параллельны*, если они совпадают или не имеют общих точек. Параллельность является отношением эквивалентности, поэтому все прямые делятся на классы эквивалентности параллельных прямых. Легко видеть, что количество таких классов равно 5. К плоскости $AF(4)$ добавим 5 точек (называемых *бесконечно удаленными точками*) и будем считать, что все они лежат на одной прямой (*бесконечно удаленной прямой*). Полученное множество называется *проективизацией* аффинной плоскости $AF(4)$ и обозначается $PF(4)$; в нем 21 точка, 21 прямая, 5 точек на каждой прямой, через каждую точку проходят 5 прямых, и любые две различные прямые имеют ровно одну общую точку. Проективная плоскость $PF(4)$ показана на рис. 14.3.

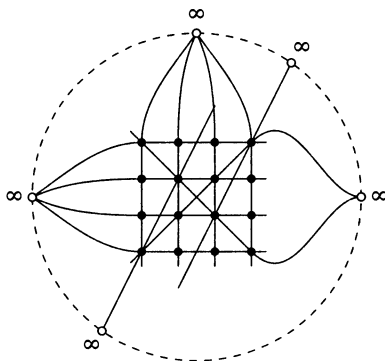


Рис. 14.3. Проективизация плоскости $AF(4)$

14.5.2. Конструкция, описанная выше для $q = 4$, в действительности пригодна для любого $q = p^m$ с простым p . В результате получается проективная геометрия $PF(q)$; в ней $q^2 + q + 1$ точек, $q^2 + q + 1$ прямых, $q + 1$ точек на каждой прямой, через каждую точку проходят $q + 1$ прямых, и любые две различные прямые на $PF(q)$ имеют ровно одну общую точку.

§ 14.6. Аксиомы конечных аффинных плоскостей

14.6.1. Более традиционен аксиоматический подход к конечным геометриям. Конечная аффинная плоскость — это непустое конечное множество P элементов (называемых *точками*) с семей-

ством L подмножеств (называемых *прямыми*), для которых выполнены следующие аксиомы.

Aff.1. Через каждые две различные точки проходит ровно одна прямая.

Aff.2. Существует ровно одна прямая, параллельная данной прямой и проходящая через данную точку. (Две прямые называются *параллельными*, если они не имеют общих точек либо совпадают.)

Aff.3. Существует невырожденный треугольник (три точки, не принадлежащие одной и той же прямой).

Вторая аксиома гарантирует, что размерность множества точек меньше либо равна двум. Третья аксиома гарантирует, что эта размерность больше либо равна двум. Таким образом, размерность множества точек равна двум, и такое множество можно рассматривать как «плоскость». Построению двух простейших аффинных плоскостей (с 4 и 9 точками) посвящена задача 14.1.

Теорема 14.6.2. (i) Для каждого числа вида $q = p^m$, где p простое, а m — положительное целое число, существует аффинная геометрия $P = AF(q)$ с q точками на прямой.

(ii) Геометрия $P = AF(q)$ имеет q^2 точек и семейство из $q^2 + q$ подмножеств L , удовлетворяющее аксиомам Aff.1—Aff.3.

(iii) Если Γ_q — группа биекций множества P , переводящих прямые (т. е. элементы множества L) в прямые, то (P, Γ_q) — геометрия в смысле Клейна, которая называется аффинной плоскостью Галуа порядка q .

Существование плоскости $AF(q)$ (утверждение (i) в теореме) будет доказано в п. 14.8.3. Доказательство утверждений (ii)—(iii) составляет серию задач 14.2—14.6 в § 14.12.

§ 14.7. Аксиомы конечных проективных плоскостей

14.7.1. Конечная проективная плоскость — это непустое конечное множество P элементов (называемых *точками*) с семейством L подмножеств (называемых *прямыми*), для которых выполнены следующие аксиомы.

Proj.1. Через пару различных точек проходит ровно одна прямая.

Proj.2. Существует ровно одна точка, принадлежащая данной паре различных прямых.

Proj.3. Существуют четыре точки, через которые проходят шесть различных прямых.

Proj.4. *Существуют четыре прямые, которые проходят через шесть различных точек.*

На самом деле четвертая аксиома лишняя (она следует из первых трех), мы включаем ее для симметрии.

Простейшая конечная проективная плоскость (которая называется *плоскостью Фано*) показана на рис. 14.4. Она имеет 7 точек, 7 прямых, 3 точки на каждой прямой и 3 прямые, проходящие через каждую точку. Четыре точки в центре рисунка удовлетворяют аксиоме Proj.3. Можно построить плоскость Фано исходя из аффинной плоскости с четырьмя точками, если добавить «бесконечно удаленную прямую», как описано в п. 14.5.1.

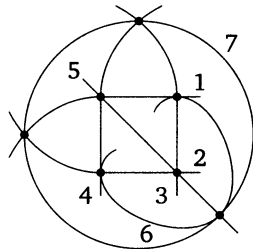


Рис. 14.4. Плоскость Фано

14.7.2. Проективная двойственность. Как и в случае вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, для конечной проективной плоскости выполнен принцип двойственности: если поменять местами слова «точка» и «прямая» в формулировке любой теоремы и соответственно изменить отношения инцидентности, то получится новая теорема. Этот принцип следует из того, что четыре аксиомы, приведенные выше, распадаются на две пары, двойственные друг другу. Но конечная проективная плоскость, полученная из данной по двойственности, не обязательно ей изоморфна. Вопросы двойственности в конечном случае довольно тонки, и мы их здесь не обсуждаем.

Теорема 14.7.3. Пусть (P, L) — конечная проективная плоскость. Тогда существует такое натуральное число n , называемое порядком проективной плоскости, что:

- (i) каждая прямая содержит $n + 1$ точек;
- (ii) каждая точка содержится в $n + 1$ прямых;
- (iii) количество точек равно количеству прямых и равно $n^2 + n + 1$.

Замечание 14.7.4. Теорема не утверждает существование конечных проективных плоскостей: в ней предполагается, что конечная проективная плоскость дана, так что утверждается лишь, что если существует плоскость, удовлетворяющая аксиомам Proj.1—Proj.3, то количество прямых и точек на ней удовлетворяет ограничениям (i)—(iii).

14.7.5. Доказательство теоремы 14.7.3. Пусть (P, L) — конечная проективная плоскость, $l, t \in L$, и пусть точка $a \in P$ не лежит

ни на l , ни на m (такая точка существует по аксиоме Proj.3). Рассмотрим отображение f множества точек прямой l в множество точек прямой m , при котором каждой точке $x \in l$ соответствует точка пересечения прямых xa и m . В силу аксиом Proj.1—Proj.2 отображение f корректно определено и биективно. Обозначим количество точек на прямой l через $n + 1$. Тогда утверждение (i) выполнено. Теперь утверждение (ii) вытекает из принципа двойственности. Чтобы доказать (iii), зафиксируем некоторую точку $a \in P$. Каждая прямая, проходящая через a , проходит и через n других точек, поэтому $|P| = (n + 1)n + 1 = n^2 + n + 1$. В силу двойственности $|L| = n^2 + n + 1$, что завершает доказательство. \square

Замечания 14.7.6. 1. Можно перейти от конечной аффинной плоскости к проективной, добавив $q + 1$ «бесконечно удаленных точек» (соответствующих классам параллельных прямых) и одну новую прямую (состоящую из всех бесконечно удаленных точек). Обратно, можно перейти от проективной плоскости к аффинной, удалив одну прямую (со всеми ее точками). К сожалению, результат не определен корректно: он может зависеть от выбора прямой!

2. Для проективных плоскостей порядка p^m при $m > 1$ теорема единственности неверна (например, существует несколько неизоморфных проективных плоскостей порядка 9, см. задачу 14.9).

3. В настоящее время неизвестно, для каких значений q существуют проективные плоскости порядка q . А именно, ответ неизвестен уже для $q = 12$. Этот и другие открытые вопросы, как и связанные с ними гипотезы, кратко обсуждаются в § 14.11.

§ 14.8. Построение проективных плоскостей над конечными полями

В этом параграфе мы дадим конструктивное определение конечных проективных плоскостей на основе теории линейных пространств над конечными полями, аналогичное определению вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$ (ср. § 12.1).

14.8.1. Основная конструкция. Рассмотрим трехмерное векторное пространство V над конечным полем $F = F(p^m)$, где p простое. Пусть P — множество его одномерных подпространств, которые мы теперь назовем *точками*, а L — множество его двумерных подпространств, которые мы теперь назовем *прямыми*; будем говорить, что прямая $l \in L$ *проходит* через точку $p \in P$ (и что p

содержится в l , а l содержит p), если имеется включение линейных пространств $p \subset l$.

Теорема 14.8.2. (i) *Результатом вышеописанной конструкции является конечная проективная плоскость (P, L) порядка $q = p^m$.*

(ii) *В качестве группы преобразований множества P возьмем множество его биекций Γ , переводящих прямые в прямые. Тогда (P, Γ) — геометрия в смысле Клейна.*

Доказательство. Все аксиомы Proj.1—Proj.4 непосредственно следуют из построения. Утверждение (ii) составляет содержание задачи 14.6. \square

Построенная таким образом геометрия называется *конечным проективным пространством* над полем $F(p^m)$ и обозначается $PF(p^m)$.

Следствие 14.8.3. *Существует конечная аффинная плоскость порядка $q = p^m$, где p — любое простое число, m — любое натуральное число.*

Доказательство. Чтобы построить указанную плоскость, достаточно удалить одну прямую (и все ее точки) из конечной проективной плоскости порядка q . \square

Этот факт завершает доказательство утверждения (i) теоремы 14.3.2.

§ 14.9. Теорема Дезарга

Теорема Дезарга, которую мы доказали для вещественной проективной плоскости $\mathbb{R}P^2$, неверна для произвольной конечной проективной плоскости. Однако справедливо следующее утверждение.

Теорема 14.9.1. *Для конечных проективных плоскостей $PF(p^m) = (P, L)$ теорема Дезарга верна, т. е. три прямые $x_1y_1, x_2y_2, x_3y_3 \in L$ пересекаются в одной точке в точности тогда, когда коллинеарны точки пересечения $z_1, z_2, z_3 \in P$ пар прямых x_2x_3 и y_2y_3 , x_3x_1 и y_3y_1 , x_1x_2 и y_1y_2 соответственно.*

Доказательство. В доказательстве мы используем модель плоскости $PF(p^m)$, построенную в п. 14.8.1, т. е. рассматриваем точки как одномерные линейные подпространства векторного пространства над $F(p^m)$, а прямые — как двумерные подпространства.

Прежде всего заметим, что теорема Дезарга самодвойственна, поэтому достаточно доказать ее в одну сторону: предположив, что прямые A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3 пересекаются в одной точке (которую мы обозначим S), нужно показать, что точки пересечения P_1, P_2, P_3 коллинеарны. Если точка S лежит на каждой из трех пря-

Линейный оператор φ невырожден и переводит линейные подпространства в линейные подпространства той же размерности. В частности,

$$\varphi(A_1) = B_1, \quad \varphi(P_2) = P_2, \quad \varphi(P_3) = P_3, \quad \varphi(S) = S.$$

Векторы p_2, p_3 образуют базис на прямой P_2P_3 (рассматриваемой как двумерное векторное пространство), поэтому оператор φ действует на ней тождественно. Пусть теперь Λ — произвольная прямая, проходящая через S . Поскольку φ оставляет S на месте, как и точку пересечения прямых Λ и P_2P_3 , получаем, что $\varphi(\Lambda) = \Lambda$.

Далее, точка A_2 лежит на прямых SA_2 и B_1P_3 , и потому $\varphi(A_2)$ — точка пересечения прямых SA_2 и B_1P_3 , откуда $\varphi(A_2) = B_2$. Аналогично $\varphi(A_3) = B_3$. Таким образом, $\varphi(A_2A_3) = B_2B_3$. Пусть теперь P — точка пересечения прямых A_2A_3 и P_2P_3 . Тогда точка $\varphi(P)$ лежит на прямой B_2B_3 , но в то же время $\varphi(P) = P$. Поэтому $P = P_1$ и P_1 лежит на прямой P_2P_3 , что и требовалось доказать. \square

Замечания 14.9.2. Отметим, что это доказательство (как и доказательство в п. 12.7.1) в некотором смысле «трехмерно»: заменив точки векторами, мы по существу добавили точку (начало координат в трехмерном пространстве $F(p^m)$), лежащую вне плоскости, которая содержит все данные точки.

§ 14.10. Алгебраические структуры на конечных проективных плоскостях

До сих пор мы применяли алгебру (конечные поля) для построения геометрических объектов (конечных аффинных и проективных плоскостей). Теперь попробуем пойти в обратном направлении, т. е. выясним, что можно извлечь из геометрических аксиом конечной проективной плоскости относительно алгебраической структуры проективной прямой. К сожалению, не оправдывается естественное оптимистическое ожидание, что аксиомы Proj.1—Proj.4 обеспечивают наличие $p^m + 1$ точек на каждой прямой (для некоторого простого p и целого положительного m) и что эти точки можно естественным образом складывать и умножать, тем самым образуя поле, изоморфное $F(p^m)$. На самом деле ситуация сложнее, в общем случае из аксиом можно получить алгебраическую структуру, но не структуру поля: умножение некоммутативно и только с одной стороны дистрибутивно (см. ниже п. 14.10.3).

14.10.1. Введение координат. Пусть (P, L) — конечная проективная плоскость порядка $n \geq 2$. (Это, напомним, означает, что (P, L) удовлетворяет аксиомам Proj.1—Proj.4, а одна из прямых (а тогда и каждая) содержит n точек.) Пусть F — множество из n элементов; подчеркнем, что F — множество произвольных символов, оно не является полем, на самом деле на нем вначале не определены никакие алгебраические операции. Наша цель — наделить F алгебраической структурой (надеясь получить поле) и с ее помощью ввести координаты на конечной проективной плоскости (P, L) .

Вначале выберем в F два произвольных элемента, которые обозначим 0 и 1. Пусть ∞ — символ, не принадлежащий F . С учетом аксиомы Proj.3 выберем на нашей плоскости *начальный четырехугольник*, т. е. четыре точки, никакие три из которых не лежат на одной прямой. Обозначим эти точки через $(0; 0)$, (0) , (∞) , $(1; 1)$, а шесть прямых, проходящие через них, обозначим следующим образом:

$$\begin{aligned} [0; 0] &:= (0; 0)(0), & [0] &:= (0; 0)(\infty), & [\infty] &:= (0)(\infty), \\ [1] &:= (1; 1)(\infty), & [0; 1] &:= (1; 1)(0), & [1; 0] &:= (0; 0)(1; 1). \end{aligned}$$

Эти шесть прямых пересекаются в семи точках, из которых четыре принадлежат начальному четырехугольнику, а остальные три мы обозначим следующим образом:

$$(1; 0) := [1][0; 0], \quad (0; 1) := [0][0; 1], \quad (1) := [\infty][1; 0],$$

где в правой части стоят точки пересечения соответствующих прямых. Например, формула $(1; 0) = [1][0; 0]$ означает, что $(0; 1)$ является точкой пересечения прямых $[1]$ и $[0; 0]$.

Если P не содержит других точек, то $n = 2$ и, как легко видеть, мы получили плоскость Фано. Читателю будет полезно взглянуть на рис. 14.4 и наделить ее точки координатами в соответствии с вышеописанной конструкцией.

Если еще остались другие точки, то $n > 2$. Пусть a — произвольный элемент из F , отличный от 0 и 1. Для каждого такого a определим новые точки и прямые, положив

$$\begin{aligned} [a; 0] &:= (0; 0)(a), & (1; a) &:= [1][a; 0], & [0; a] &:= (0)(1; a), \\ (a; a) &:= [0; a][1; 0], & [a] &:= (a; a)(\infty), \\ (a; 0) &:= [a][0; 0], & (0; a) &:= [0; a][0]. \end{aligned}$$

Если в F есть элементы b , отличные от 0, 1, a , то положим

$$(a; b) := [a][0; b], \quad [a; b] := (a)(0; b).$$

Таким образом, мы наделили координатами все точки нашей конечной проективной плоскости, и мы знаем точки пересечения любых двух прямых.

14.10.2. Сложение и умножение. Теперь можно определить сумму и произведение двух произвольных элементов $a, b \in F$, положив

$$(a; a + b) := [a][1; b], \quad (a; a \cdot b) := [a][b; 0];$$

здесь используются обозначения, введенные в п. 14.10.1. Мотивировка этого определения состоит в том, что оно согласовано со сложением и умножением, индуцированными на точках проективной прямой в случае конечной проективной плоскости над полем $F(p^m)$. Приглашаем читателя вернуться к определению конечной проективной плоскости над полем и проверить, что на ней можно ввести координаты, как описано выше, и что определенные выше операции совпадают с теми, которые индуцированы полем $F(p^m)$.

Как отмечено выше, не всегда эти операции наделяют F структурой поля. Они удовлетворяют более слабым аксиомам, чем аксиомы поля, и сейчас мы дадим определение соответствующей структуры.

14.10.3. Почти поля. *Почти поле* — это множество F с двумя бинарными операциями, которые называются *сложением* и *умножением*, причем по сложению F является абелевой группой с нейтральным элементом 0, множество $F \setminus 0$ является группой (не обязательно абелевой) по умножению и выполнен закон дистрибутивности справа, т. е. $(a + b)c = ac + bc$.

Если закон дистрибутивности слева не выполнен (такие примеры почти полей существуют), то почти поле даже не является кольцом. Мы не будем описывать подобные примеры и подробно изучать почти поля: эти примеры сложны и довольно уродливы. Ограничимся тем, что сформулируем (без доказательства) две красивые теоремы и некоторые открытые проблемы.

Теорема 14.10.4. (i) Для каждого конечного почти поля F можно определить проективную плоскость над F посредством конструкции из § 14.8, заменив $F(p^m)$ на F .

(ii) Для каждой конечной проективной плоскости порядка n существует почти поле F (порядка $n - 1$) исходя из которого эта проективная плоскость строится, как описано в утверждении (i).

Доказательство утверждения (i) проводится так же, как в § 14.8, а утверждение (ii) можно доказать скучной последовательностью

геометрических конструкций, которыми проверяются многочисленные аксиомы почти полей.

Теорема 14.10.5. *Конечная проективная плоскость является проективной плоскостью над некоторым полем $F(p^m)$ тогда и только тогда, когда на ней выполнена теорема Дезарга.*

Утверждение «только тогда» доказано выше (см. п. 14.8.1), а утверждение «тогда» — это новая сложная последовательность искусственных геометрических конструкций для проверки нужных алгебраических аксиом.

§ 14.11. Открытые проблемы и гипотезы

Основная открытая проблема здесь следующая: для каких значений q существует конечная проективная плоскость порядка q и для каких значений q конечная проективная плоскость порядка q единственна?

Мы знаем, что существует ровно одна проективная плоскость каждого из порядков 2, 3, 4, 5, 7, 8 (см. задачи 14.10—14.11). Известны также теоретико-числовые ограничения, запрещающие существование проективных плоскостей некоторых порядков.

Теорема 14.11.1 (Брак—Райзер). *Пусть q сравнимо с 1 или 2 по модулю 4. Если существует проективная плоскость порядка q , то q можно представить как сумму квадратов двух натуральных чисел.*

Доказательство, опубликованное в статье [10], сложно, и мы его опустим. Эта теорема запрещает существование проективных плоскостей порядка 6, 14, 21, 22, 30 и т. п.

Гипотеза 14.11.2. *Порядок q любой конечной проективной плоскости — простое число $q = p$ или степень простого числа $q = p^m$.*

Первое натуральное число q , которое не удовлетворяет условиям этой гипотезы, равно 6, и действительно можно доказать (см. задачу 14.9), что не существует проективной плоскости порядка 6. Следующее такое число равно 10, и лишь в 1991 г. было установлено с помощью суперкомпьютера, что для него гипотеза выполняется. Но уже для $q = 12$ существование проективной плоскости порядка q — открытый вопрос.

Гипотеза 14.11.3. *Все проективные плоскости простого порядка p дезарговы.*

Существуют недезарговы проективные плоскости непростых порядков. «Наименьшая» из них имеет порядок 9 (задача 14.15).

§ 14.12. Задачи

14.1. Постройте аффинные геометрии с 4 точками и с 9 очками.

14.2. Пусть одна из прямых на аффинной плоскости (P, L) из следствия 14.8.3 состоит из q точек. Докажите, что плоскость P состоит из q^2 точек.

14.3. Пусть одна из прямых на аффинной плоскости (P, L) из следствия 14.8.3 состоит из q точек. Докажите, что все другие прямые состоят из q точек.

14.4. Пусть одна из прямых на аффинной плоскости (P, L) из следствия 14.8.3 состоит из q точек. Докажите, что L состоит из $q^2 + q$ прямых.

14.5. Пусть одна из прямых на аффинной плоскости (P, L) состоит из q точек. Докажите, что через каждую точку проходят $q + 1$ прямых.

14.6. Докажите, что конечная аффинная плоскость $AF(p^m)$ является геометрией в смысле Клейна.

14.7. На аффинной плоскости из 9 точек постройте систему прямых, проходящих через одну точку.

14.8. Опишите проективизацию аффинной плоскости из задачи 14.5.

14.9*. Докажите, что не существует конечной проективной плоскости порядка $q = 6$.

14.10. Докажите, что проективные плоскости порядков 2, 3, 4, 5 единственны.

14.11*. Докажите, что проективные плоскости порядков 7 и 8 единственны.

14.12*. Существует ли конечная аффинная плоскость порядка $q = 6$?

14.13*. Найдите две неизоморфные аффинные плоскости порядка $q = 9$.

14.14. Добавляя «бесконечно удаленные точки» к аффинным геометриям порядков 3, 4, 5, постройте соответствующие конечные проективные плоскости.

14.15.** Приведите пример конечной проективной плоскости, из которой можно получить неизоморфные аффинные плоскости, удаляя одну прямую.

14.16*. Постройте недезаргову проективную плоскость порядка 9.

Глава 15

Иерархия геометрий

Эта глава — в некотором смысле обзор всей книги: мы попробуем внести некий порядок в категорию геометрий, сведя воедино связи между различными геометриями, рассмотренные в предыдущих главах.

Сделаем это в порядке возрастания размерности, начав с прямых (размерность единица, см. § 15.1), а затем рассмотрев плоскости различных видов (размерность два, см. § 15.2) и трехмерные пространства (§ 15.4). (Геометрии размерностей выше трех здесь не рассматриваются, поскольку, по моему мнению, их надлежащее место — в курсе линейной алгебры.)

В § 15.3 мы даем систематическое сравнение метрической, аффинной и проективной геометрий, выделяя роль расстояния, отношения отрезков (на прямой) и двойного отношения как инвариантов соответствующих групп преобразований.

В § 15.5 мы возвращаемся к геометриям с конечными и дискретными группами преобразований и определяем их место в «иерархии» геометрий, описанных в этой главе.

Содержание этой главы (и всей книги) просуммировано в § 15.6 и, очень сжато, на рис. 15.1.

§ 15.1. Размерность единица: прямые

В этом параграфе собраны основные очень простые факты о классических одномерных геометриях. С точки зрения логики следовало бы поместить этот тривиальный материал в самом начале книги, но мы этого не сделали, поскольку было бы крайне неинтересно начинать изучение геометрий таким образом.

15.1.1. Евклидова прямая. Моделью евклидовой прямой служит вещественная ось \mathbb{R} с группой преобразований $\text{Isom}(\mathbb{R})$, состоящей из параллельных сдвигов ($x \mapsto x + v$, $v \in \mathbb{R}$) и отражений относительно каждой точки. Подмножество всех параллельных сдвигов является подгруппой в $\text{Isom}(\mathbb{R})$ — группой движений $\text{Isom}^+(\mathbb{R})$

евклидовой прямой. Чтобы задать элемент из $\text{Isom}^+(\mathbb{R})$, достаточно указать любую точку на прямой и ее образ.

Расстояние между двумя точками $x, y \in \mathbb{R}$, заданное формулой $d(x, y) := |x - y|$, инвариантно относительно $\text{Isom}(\mathbb{R})$. Для каждой точки x и ее образа y имеются два элемента в $\text{Isom}(\mathbb{R})$, переводящие x в y : один из них — параллельный сдвиг, а другой — отражение относительно середины отрезка, соединяющего x и y .

15.1.2. Гиперболическая прямая. Моделью гиперболической прямой может служить интервал $(-1, 1)$ с функцией расстояния

$$d(x, y) := \frac{1}{2} \log(\langle 1, -1, x, y \rangle),$$

где $\langle 1, -1, x, y \rangle$ — двойное отношение точек $1, -1, x, y$, т. е.

$$\langle 1, -1, x, y \rangle = \frac{|x-1|}{|x+1|} \cdot \frac{|y+1|}{|y-1|}$$

Среди изометрий гиперболической прямой имеются *сдвиги* (одномерные аналоги параллельных переносов), заданные формулой

$$T_v : (-1, 1) \rightarrow (-1, 1), \quad x \mapsto \frac{x+v}{xv+1},$$

где v — вещественное число, по абсолютной величине меньшее единицы. Композиция двух сдвигов является сдвигом, и эта операция имеет физическое истолкование в теории относительности (см. § 9.4).

Изометрии гиперболической прямой не исчерпываются сдвигами, к ним принадлежат также *симметрии относительно точки*; подробности см. в задаче 15.1.

15.1.3. Окружность. Геометрия окружности S^1 — одномерный аналог сферической геометрии. Ее группа преобразований $O(2)$ состоит из поворотов (на углы $0 \leq \varphi < 2\pi$) и симметрий относительно прямых, проходящих через центр окружности; $O(2)$ содержит в качестве подгруппы группу всех поворотов $SO(2)$. Чтобы задать элемент $r \in SO(2)$, достаточно указать единственную точку $x \in S^1$ и ее образ $r(x)$.

Если определить расстояние между двумя точками на окружности естественным образом (как не превосходящий π угол между радиусами, проходящими через них), окружность будет наделена структурой метрического пространства.

Имеется естественный морфизм между евклидовой прямой и окружностью, а именно экспоненциальное накрытие \exp заданное пра-

вилем $\mathbb{R} \ni \varphi \mapsto e^{i\varphi} \in \mathbb{S}^1$. Это накрытие играет ключевую роль в элементарной топологии (например, при определении степени отображений окружности), и его наглядное представление на рис. 16.1 (с. 213) является одним из ключевых образов в математике. Морфизм exp , очевидно, является локальной (но не глобальной) изометрией.

15.1.4. Эллиптическая прямая. Эллиптическая прямая является одномерным аналогом эллиптической плоскости Римана. Ее моделью может служить окружность, на которой отождествлены диаметрально противоположные точки. Ее группа преобразований $\tilde{O}(2)$ состоит из поворотов (на углы $0 \leq \varphi < \pi$) и симметрий (любая симметрия имеет две неподвижные точки, через которые проходят взаимно перпендикулярные диаметры). Однако группа $\tilde{O}(2)$ в действительности изоморфна $O(2)$ (поворот на угол φ соответствует повороту на 2φ , а симметрии действуют точно так же), и легко построить изоморфизм геометрий между эллиптической прямой и окружностью. Так что эллиптическая прямая — лишь иная модель геометрии окружности.

15.1.5. Аффинная прямая. В качестве множества точек аффинной прямой Aff^1 можно взять вещественную ось (как и в случае евклидовой прямой), но ее группа преобразований — аффинная группа $\text{Aff}(1)$ — «намного больше» группы $\text{Isom}(\mathbb{R})$ и на самом деле содержит $\text{Isom}(\mathbb{R})$ как подгруппу. Группа $\text{Aff}(1)$ состоит из всех преобразований вида $x \mapsto ax + b$, где $a, b \in \mathbb{R}$ и $a \neq 0$.

Чтобы задать аффинное преобразование, достаточно указать упорядоченную пару точек и их образов (ср. задачу 15.2).

15.1.6. Проективная прямая. Проективная прямая $\mathbb{R}P^1$ получается из вещественной прямой \mathbb{R} добавлением бесконечно удаленной точки ∞ , так что топологически это окружность. Ее группа преобразований состоит из биекций множества $\mathbb{R} \cup \infty$, сохраняющих двойное отношение любых четырех точек a, b, c, d , т. е.

$$[(a - c)/(b - c)] : [(a - d)/(b - d)]$$

(определение двойного отношения в случае, когда одна из точек a, b, c, d есть ∞ , см. в задаче 15.4).

Отметим, что можно также определить $\mathbb{R}P^1$ как множество прямых, проходящих через начало координат плоскости \mathbb{R}^2 ; его группа преобразований — это группа невырожденных матриц порядка 2, рассматриваемых с точностью до умножения столбцов на ненулевые константы.

Эти два определения проективной прямой равносильны, т. е. задают изоморфные геометрии; доказательству посвящена задача 15.5.

§ 15.2. Размерность два: плоскости

Здесь собраны некоторые свойства основных объектов, изучаемых в этой книге, — классических двумерных геометрий. При рассмотрении групп преобразований мы используем следующую (не очень стандартную) терминологию: будем говорить, что группа преобразований имеет две *степени свободы*, если каждый ее элемент определяется образами двух точек. (Отметим, что это понятие не совпадает с размерностью группы, если последняя имеет структуру группы Ли.)

15.2.1. Евклидова плоскость. Мы обозначаем евклидову плоскость через \mathbb{R}^2 и считаем, что это понятие знакомо читателю (некоторые его основные свойства на всякий случай перечислены в гл. 0). Плоскость некомпактна и ориентируема. Ее группа преобразований $\text{Isom}(\mathbb{R}^2)$ содержит подгруппу движений $\text{Isom}^+(\mathbb{R}^2)$, имеющую две *степени свободы* в том смысле, что любое движение определяется образами двух точек. Основным инвариантом этой геометрии — расстояние между двумя точками.

15.2.2. Сфера. Мы обозначаем сферу через \mathbb{S}^2 . Она компактна и ориентируема. Ее группа преобразований, обозначаемая $\text{Isom}(\mathbb{S}^2) = \text{O}(3)$, содержит подгруппу $\text{Isom}^+(\mathbb{S}^2) = \text{SO}(3)$ изометрий, сохраняющих ориентацию; эта подгруппа имеет две степени свободы. Основным инвариантом этой геометрии — расстояние между двумя точками. Отметим, что это расстояние не совпадает с тем, которое индуцировано стандартным вложением сферы в евклидово пространство: это угловое расстояние (или, что то же самое, геодезическое расстояние). Сферическая геометрия подробно изложена в гл. 6.

15.2.3. Гиперболическая плоскость. Мы обозначаем гиперболическую плоскость через \mathbb{L}^2 . Она некомпактна и ориентируема. Ее группа преобразований, обозначаемая $\text{Isom}(\mathbb{L}^2)$, содержит подгруппу $\text{Isom}^+(\mathbb{L}^2)$ изометрий, сохраняющих ориентацию (т. е. движений), которая имеет две степени свободы. Основным инвариантом является расстояние между двумя точками. Гиперболическая геометрия подробно изложена в главах 7—10.

15.2.4. Эллиптическая плоскость. Мы обозначаем эллиптическую плоскость через $\mathbb{E} \mathbb{L}^2$. Она компактна и неориентируема. Ее

группа преобразований, обозначаемая $\text{Isom}(\text{Ell}^2)$, имеет две степени свободы. Основной инвариант этой геометрии — расстояние между двумя точками. Несколько подробнее об эллиптической геометрии говорится в § 6.7.

15.2.5. Аффинная плоскость. Мы обозначаем аффинную плоскость через Aff^2 . Она некомпактна и ориентируема. Ее группа преобразований, обозначаемая $\text{Aff}(2)$, содержит подгруппу $\text{Aff}^+(2)$ аффинных преобразований, сохраняющих ориентацию; эта подгруппа имеет три степени свободы. Основной инвариант этой геометрии — отношение расстояний между тремя коллинеарными точками.

15.2.6. Проективная плоскость. Мы обозначаем проективную плоскость через \mathbb{RP}^2 . Она компактна и неориентируема. Ее группа преобразований, обозначаемая $\text{Proj}(2)$, имеет четыре степени свободы. Основной инвариант этой геометрии — двойное отношение четырех коллинеарных точек. Проективная геометрия подробно изложена в гл. 12.

§ 15.3. От метрического к аффинному и проективному

Прежде чем перейти к размерности три (в следующем параграфе), вкратце посмотрим, что происходит при переходе от двумерных метрических геометрий к проективной плоскости через аффинную.

15.3.1. Метрическое. Во многих (но не всех) геометриях существует функция расстояния (в другой терминологии — метрика). Это относится к евклидовой (параболической) геометрии, а также к гиперболической, эллиптической и сферической геометриям. Для таких метрических геометрий можно определить соответствующую группу преобразований (которая дает им структуру геометрии в смысле Клейна) как группу преобразований, сохраняющих расстояние (изометрий), с композицией в качестве групповой операции.

15.3.2. Аффинное. Евклидова геометрия в размерности два (\mathbb{R}^2) является подгеометрией аффинной планиметрии (Aff^2): последняя получается из \mathbb{R}^2 , если оставить прежнее множество точек, но расширить группу преобразований. А именно, выбрав любые три неколлинеарные точки O, X, Y , мы тем самым зафиксируем систему координат. В ней аффинные преобразования имеют вид

$$\begin{cases} x' = ax + by + k, \\ y' = cx + dy + l, \end{cases} \quad (15.1)$$

где $a, b, c, d, k, l \in \mathbb{R}$, $ad - cb \neq 0$, а $(x, y), (x', y')$ — координаты прообраза и образа в базисе OXY . Аффинные преобразования сохраняют или меняют ориентацию в соответствии со знаком определителя $ad - bc$.

В отличие от евклидовой геометрии, гиперболическая, эллиптическая и сферическая геометрии не имеют «аффинного аналога»; например, группу преобразований гиперболической плоскости нельзя расширить до большей группы (аналогичной аффинной), действующей на том же множестве точек; более точная формулировка содержится в задаче 15.6.

15.3.3. Проективное. Проективная плоскость получается из аффинной путем добавления «бесконечно удаленной прямой» и значительного расширения группы преобразований (так что бесконечно удаленная прямая не выделена, она «так же хороша», как все другие прямые, т. е. пересекает их все и может быть переведена в любую другую прямую проективным преобразованием).

Группу проективных преобразований $\text{Proj}(2)$ можно определить в терминах однородных координат или двойного отношения четырех коллинеарных точек. Группа проективных преобразований имеет на одну степень свободы больше, чем аффинная группа (см. выше п. 15.2.6).

Проективная геометрия содержит в качестве подгеометрий не только аффинную, но и евклидову, гиперболическую и эллиптическую геометрии. Она не содержит сферическую геометрию (см. задачу 15.7).

Содержание этого параграфа просуммировано в таблице.

	компактность	ориентируемость	степени свободы	инвариант
\mathbb{R}^2	—	+	2	расстояние
S^2	+	+	2	расстояние
L^2	—	+	2	расстояние
El^2	+	—	2	расстояние
Aff^2	—	+	3	отношение расстояний на прямой
\mathbb{RP}^2	—	—	4	двойное отношение

Свойства двумерных геометрий

§ 15.4. Геометрии трехмерного пространства

В этом кратком параграфе, как и во всей книге, мы не изучаем подробно трехмерные геометрии. Однако мы упоминали и даже определили трехмерную гиперболическую, эллиптическую и проективную геометрии (\mathbb{L}^3 , $\mathbb{E}\mathbb{L}^3$ и $\mathbb{R}P^3$); мы также предполагаем, что читатель знаком с евклидовой стереометрией \mathbb{R}^3 и, возможно, аффинной стереометрией Aff^3 .

Цель этого краткого параграфа лишь в том, чтобы показать соотношение между пятью трехмерными геометриями и связать трехмерную проективную геометрию с двумерной сферической, которая (как отмечено выше) не является подгеометрией проективной планиметрии, в отличие от двумерных эллиптической, гиперболической и параболической (евклидовой) геометрий.

Соотношение между пятью рассматриваемыми трехмерными геометриями такое же, как между их двумерными аналогами, а именно: евклидова стереометрия является подгеометрией аффинной стереометрии, та в свою очередь — подгеометрия проективной стереометрии; далее, эллиптическая стереометрия — подгеометрия проективной стереометрии; и, наконец, гиперболическая стереометрия также является подгеометрией проективной стереометрии.

При этом двумерная сфера лежит в евклидовом трехмерном пространстве и, разумеется, \mathbb{S}^2 является подгеометрией геометрии \mathbb{R}^3 , т.е. она является подмножеством пространства \mathbb{R}^3 , а ее группа преобразований $O(3)$ является подгруппой группы $\text{Isom}(\mathbb{R}^3)$. По транзитивности \mathbb{S}^2 является подгеометрией в $\mathbb{R}P^3$.

§ 15.5. Конечные и дискретные геометрии

В этом очень коротком параграфе мы лишь перечислим конечные и дискретные геометрии, появляющиеся в первой половине этой книги, и укажем их взаимоотношение.

Оба вида дискретных геометрий, изучаемые в главах 4 и 5, а именно геометрии правильных замощений (фёдоровские геометрии) и геометрии отражений (геометрии Кокстера), являются дискретными подгеометриями евклидовой плоскости \mathbb{R}^2 . Конечные геометрии из гл. 3, т.е. геометрии правильных многогранников (платоновых тел), являются подгеометриями геометрии $(\mathbb{S}^2, O(3))$; в свою очередь, они содержат простейшие геометрии, рассмотренные в гл. 1. Другая серия дискретных геометрий — подгеометрии ги-

гиперболической геометрии, кратко упомянутые в гл. 7. В некотором смысле это геометрии типа Фёдорова и Кокстера, в их основе — правильные многоугольники, заполняющие гиперболическую плоскость. В действительности существует много других дискретных подгеометрий на гиперболической плоскости, но в этой книге мы их не рассматриваем. Другой класс конечных геометрий составляют замощения сферы треугольниками Кокстера (см. § 6.6); они являются подгеометриями двумерной сферической геометрии.

Отметим, что мы не рассматриваем в этой главе конечные геометрии из гл. 14, поскольку они сюда «не вписываются» — они не являются подгеометриями проективной геометрии.

§ 15.6. Иерархия геометрий

15.6.1. Иерархическое дерево геометрий. Этот параграф — по существу комментарий к рис. 15.1. На этом рисунке все геометрии, рассмотренные в этой книге (за исключением конечных геометрий из гл. 14), помещены на пять уровней; эти уровни, если двигаться снизу вверх, — проективное, аффинное, метрическое, дискретное, конечное. Все геометрии присутствуют на соответствующих уровнях; они соединены стрелками, обозначающими инъективные морфизмы. Исключение составляет стрелка, соединяющая S^2 с $\mathbb{R}P^2$, которая обозначает двулистное накрытие проективной плоскости сферой. Если, не учитывая эту стрелку, рассматривать геометрии как вершины, а стрелки как ребра, то мы получим направленный граф; он представляет собой дерево с корнем: если начать с любой вершины (геометрии), то стрелки приведут к корню $\mathbb{R}P^3$. Это означает, что все геометрии, рассмотренные нами (кроме геометрий из гл. 14), являются подгеометриями (определение подгеометрии см. п. 1.4.5) трехмерной проективной геометрии $\mathbb{R}P^3$.

Этим обосновывается знаменитое высказывание Кэли: «Проективная геометрия — это вся геометрия». Более аккуратно, но не столь ярко можно было бы сказать: «Большинство геометрий — части проективной геометрии».

15.6.2. Давайте взберемся на это «иерархическое дерево геометрий». Самое интересное восхождение начинается с вершины $\mathbb{R}P^2$ (еще на проективном уровне); затем мы должны выбрать один из трех главных маршрутов: через аффинную планиметрию на евклидову плоскость (со всеми ее красивыми дискретными и конеч-

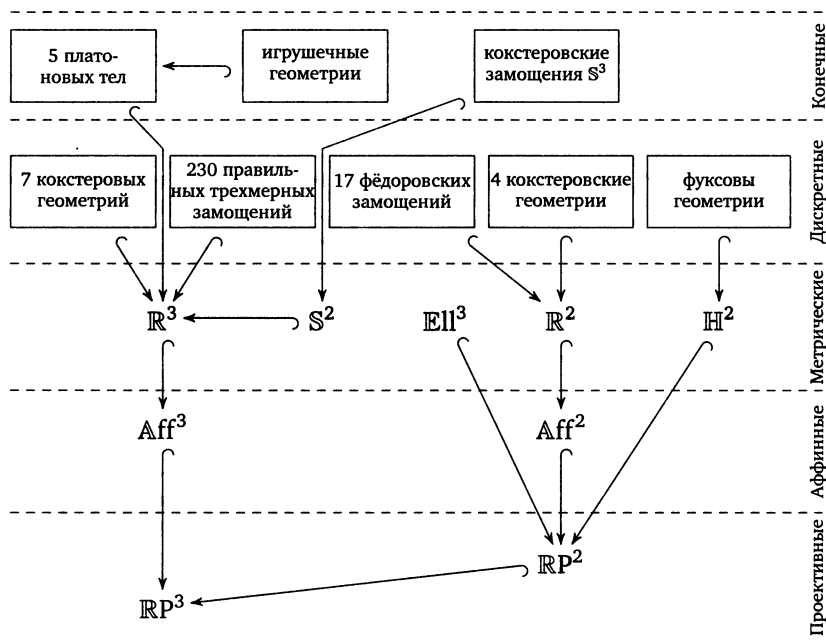


Рис. 15.1. Иерархическое дерево геометрий

ными подгеометриями) или, пропуская аффинный уровень, прямо на эллиптическую или гиперболическую плоскость, причем последняя тоже богата дискретными геометриями. (Эти дискретные геометрии, часто называемые фуксовыми, упоминались в гл. 7 и задачах к ней, но не изучались систематически в нашей книге.)

Если начать от корня \mathbb{RP}^3 , то можно выбрать маршрут, ведущий к сферической геометрии и в конечном счете к ее конечным подгеометриям Кокстера, либо совершить восхождение на уровень конечных геометрий, достигнув платоновых геометрий, которые, в свою очередь, содержат простейшие геометрии, — и тем самым вернуться к гл. 1. В каком из этих восхождений больше красоты — дело вкуса.

§ 15.7. Задачи

15.1. Выведите формулу для образа $S_a(x)$ произвольной точки $x \in (0; 1)$ на гиперболической прямой при симметрии относительно точки $a \in (0; 1)$.

15.2. Выразите параметры a и b аффинного преобразования вида $x \mapsto ax + b$ через координаты двух точек x_1, x_2 и их образов y_1, y_2 .

15.3. Выразите параметры a, b, c, d, k, l аффинного преобразования (15.1) через координаты трех точек и их образов.

15.4. Определите двойное отношение четырех точек на проективной прямой, когда одна из точек — бесконечно удаленная.

15.5. Покажите, что существует биекция между множествами точек в двух определениях проективной прямой, данных в п. 15.1.6, и что соответствующие группы преобразований изоморфны; докажите, что оба определения приводят к изоморфным геометриям.

15.6. Покажите, что невозможны такое расширение группы преобразований гиперболической геометрии и такое определение вектора, которые бы превратили множество векторов в векторное пространство над \mathbb{R} .

15.7. Докажите, что двумерная сферическая геометрия не является подгеометрией двумерной проективной геометрии.

Глава 16

Морфизмы геометрий

В этой главе мы опишем конкретные примеры и некоторые классы морфизмов геометрий. Это частные случаи отображений, обычно изучаемых в курсах алгебраической топологии или теории групп Ли, а именно накрытия, векторные расслоения и главные G -расслоения. Формальные определения рассматриваемых частных случаев (которые мы называем «геометрическими») наделяют морфизмы «дополнительной структурой» по сравнению с их определениями из курса топологии — но, удивительным образом, практически все примеры, рассматриваемые топологами, в действительности обладают этой структурой (хотя топологи обычно не учитывают ее).

Первые четыре параграфа содержат конкретные примеры геометрических морфизмов четырех типов, перечисленных выше. Эти примеры включают такие красивые конструкции, как расслоение Хопфа, грассманиан, расслоение Штифеля над грассманианом и универсальное G -расслоение Милнора. Их описание вполне элементарно (хотя в некоторых примерах требуется немного линейной алгебры и простейшей топологии), однако формальные общие определения требуют не только элементарных сведений, достаточных для предыдущих глав этой книги. Так, в § 16.3 (о группах Ли) требуется понятие гладкого многообразия и хорошее понимание основ линейной алгебры и основ топологии.

Остальные параграфы содержат основные определения и немного теории, включая две теоремы универсальности о геометрических векторных расслоениях и геометрических главных G -расслоениях, которые дают эффективные способы построения всех геометрических векторных расслоений и всех геометрических главных расслоений над данной базой. Как и в § 16.3, здесь требуется неэлементарная математика, но не используются стандартные инструменты алгебраической топологии (фундаментальная группа, группы гомотопий и гомологий); главными инструментами служат группы преобразований для геометрий прообраза и образа.

§ 16.1. Примеры геометрических накрывающих пространств

16.1.1. Накрытие эллиптической плоскости сферой. Имеется очевидный морфизм геометрии сферы ($S^2 : SO(3)$) на эллиптическую плоскость $\mathbb{E}l^2$ (см. § 6.7), который получается отождествлением противоположных точек сферы. Иначе говоря, мы рассматриваем подгруппу $\mathbb{Z}_2 \subset SO(3)$, действующую на сфере симметриями относительно центра сферы, и профакторизуем S^2 по двухточечным орбитам этого действия. Таким путем мы получим морфизм геометрий $S^2 \rightarrow \mathbb{E}l^2$, при котором прообраз любой точки $p \in \mathbb{E}l^2$ (его называют *слоем*) состоит из двух точек.

16.1.2. Экспоненциальное отображение. Экспоненциальная функция $x \mapsto e^{ix}$, известная читателю из курса анализа, на самом деле есть морфизм геометрий, а именно морфизм $\exp: \mathbb{R} \rightarrow S^1$ вида $\varphi \mapsto e^{i\varphi}$, где окружность S^1 понимается как геометрия множества унимодулярных комплексных чисел (действующего на себя умножением), т. е.

$$S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\},$$

а \mathbb{R} — геометрия множества вещественных чисел (действующего на себя сложением).

Классическая картина экспоненциального отображения (обычно присутствующая в учебниках элементарной топологии) показана на рис. 16.1.

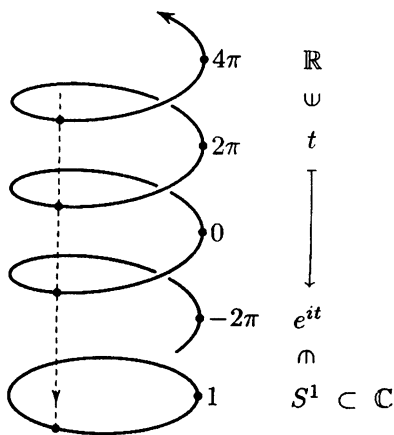


Рис. 16.1. Экспоненциальное отображение

Отметим, что прообраз любой точки $\varphi \in \mathbb{R}$, который называется *слоем* морфизма \exp , находится во взаимно однозначном соответствии с множеством целых чисел: в частности, прообразом точки $1 \in \mathbb{S}^1$ является подгруппа $\mathbb{Z} \subset \mathbb{R}$. Каждый слой также является геометрией (с группой преобразований \mathbb{Z} , действующей сложением).

16.1.3. «Накручивающее» отображение $w_n: \varphi \mapsto e^{in\varphi}$. Это морфизм геометрий $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, слоем которого является \mathbb{Z}_n — множество всех целых чисел по модулю n с естественным действием на себя сложением.

16.1.4. Частичная упорядоченность накручивающих отображений на окружности. Будем говорить, что морфизм w_n *выше*, чем морфизм w_m , а w_m *ниже*, чем w_n (обозначение: $w_n \succ w_m$), если существует морфизм геометрий $\gamma: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$, для которого $\gamma \circ w_m = w_n$ (здесь запись $\gamma \circ w$ означает, что сначала выполняется w , а потом γ). Например, $w_6 \succ w_3$, так как если взять $\gamma := w_2$, то, очевидно, $\gamma \circ w_3 = w_6$. Ясно, что \succ — отношение частичного порядка на множестве сюръективных морфизмов на окружность (не только для случая чисел вращения $\{w_n: n = 1, 2, 3, \dots\}$).

Существует интересная взаимосвязь между отношением \succ морфизмов w_n и свойствами делимости чисел n ; см. задачу 16.1.

16.1.5. Экспоненциальное отображение как самое высокое накрытие окружности. Экспоненциальное отображение *универсально* среди морфизмов w_n в том смысле, что оно выше любого другого w_n . Иначе говоря, для каждого морфизма $w_n: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ существует такой морфизм $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$, что $w_n \circ \gamma = \exp$. Доказательство содержится в задаче 16.2.

16.1.6. Плоский тор. Плоский тор — это единичный квадрат

$$\{(x, y): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

у которого отождествлены противоположные стороны ($(x, 0) \sim (x, 1)$ и $(y, 0) \sim (y, 1)$). На нем вводится естественная метрика (например, расстояние между точками $(1/2; 1 - \varepsilon)$ и $(1/2; \varepsilon)$, где $\varepsilon < 1/4$, равно 2ε). Эта метрика (см. задачу 16.6) порождает соответствующую группу изометрий, которая определяет структуру этой геометрии — *плоского тора*. Геометрия плоского тора резко отличается от геометрии тора, вложенного в \mathbb{R}^3 обычным образом, т. е. от тора за-

данного уравнением

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - 2)^2 + z^2 = 1.$$

Метрика вложенного таким образом тора (заданная геодезически) отличается от метрики плоского тора, так что два тора имеют разные группы изометрий и, значит, отличаются как геометрии.

Замечание 16.1.7. На самом деле ни одна из этих геометрий на торе не является «внутренней». Настоящую геометрию тора задает *стандартное вложение* тора в комплексное пространство \mathbb{C}^2 , т. е.

$$\mathbb{C}^2 \supset \mathbb{T} = \{(r_1 e^{i\varphi_1}, r_2 e^{i\varphi_2}) \in \mathbb{C}^2 : r_1 = 1, r_2 = 1\}.$$

16.1.8. Универсальное накрытие плоского тора. Существует естественный морфизм плоскости \mathbb{R}^2 на плоский тор \mathbb{T}_{FL}^2 , заданный правилом

$$\mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto (x \bmod 1, y \bmod 1) \in \mathbb{T}_{FL}^2.$$

Топологи называют его *универсальным накрытием* тора. Очевидно, что этот морфизм — локальная изометрия. Его *слои* (т. е. прообразы точки тора) — это решетка $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$. Алгебраист описал бы этот морфизм как факторизацию группы $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}$ по ее (нормальной) подгруппе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$.

16.1.9. Накрытие тора цилиндром. Существует очевидный морфизм *плоского цилиндра* $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^1$ на плоский тор \mathbb{T}_{FL}^2 со слоем \mathbb{Z} . Подробности предоставляются читателю (см. задачу 16.7).

16.1.10. Накрытие плоского тора самим собой. Есть много геометрических морфизмов плоского тора на себя. Их исследование предоставляется читателю (см. задачу 16.8).

§ 16.2. Примеры геометрических G -расслоений

Начнем этот параграф с описания известного расслоения Хопфа, а затем рассмотрим некоторые другие (самые несложные) морфизмы геометрий на двумерную сферу \mathbb{S}^2 (рассматриваемую как геометрия с группой вращений $SO(3)$, действующей на сфере), слоем которых (т. е. прообразом точки) является окружность. Затем рассмотрим дальнейшие примеры морфизмов, где главными действующими лицами являются так называемые «классические группы».

16.2.1. Расслоение Хопфа. Это одна из самых замысловато-красивых геометрических конструкций; она имеет очень простое ана-

литическое описание. Рассмотрим сферу \mathbb{S}^3 как подмножество двумерного комплексного пространства \mathbb{C}^2 , заданное формулой

$$\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}.$$

Тем самым мы задаем геометрию $(\mathbb{S}^3 : \text{SO}(4))$.

Группа $\mathbb{S}^1 = \{e^{i\varphi}\}$ действует на \mathbb{S}^3 умножением координат

$$(z_1, z_2) \mapsto (e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2).$$

Факторизация сферы \mathbb{S}^3 по этому действию дает комплексную проективную прямую $\mathbb{C}P^1$, что является другим названием сферы \mathbb{S}^2 (см. задачу 16.3).

Мы получили сюръективное отображение $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$, слой которого (т. е. прообраз любой точки сферы \mathbb{S}^2) — семейство окружностей \mathbb{S}^1 . Набор орбит действия \mathbb{S}^1 на трехмерной сфере \mathbb{S}^3 — семейство окружностей, параметризованные точками двумерной сферы и заполняющие \mathbb{S}^3 . Каждая пара таких окружностей зацеплена как соседние звенья цепи. На рис. 16.2 мы попытались показать, как это выглядит.

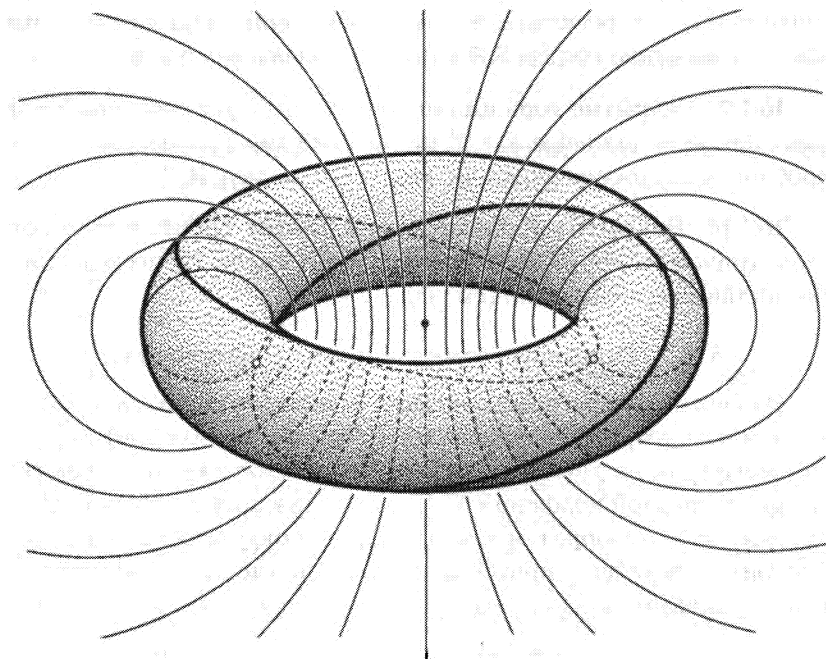


Рис. 16.2. Расслоение Хопфа

На рисунке сфера \mathbb{S}^3 изображена как евклидово пространство с добавленной «бесконечно удаленной точкой» (она присутствует на «обоих концах» вертикальной оси в пространстве \mathbb{R}^3 , превращая эту ось в одну из окружностей-орбит). На рисунке показаны еще две зацепленные окружности-орбиты; они лежат на затушеванном торе; другие кривые на рисунке представляют сечения других концентрических торов вертикальной плоскостью рисунка.

Чтобы наглядно представить себе расслоение Хопфа, читатель может обратиться к домашней странице Этьена Жиса (Etienne Ghys) и его «Dimensions» — серии прекрасных анимаций (две из них называют расслоение Хопфа в движении).

16.2.2. Естественный морфизм $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^2$. Декартово произведение $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ обладает естественной геометрической структурой (см. задачу 16.4), при этом проекция на первый сомножитель $\text{pr}_1: (s, \varphi) \mapsto s$ является морфизмом геометрий со слоем \mathbb{S}^1 .

16.2.3. Нетривиальный морфизм на \mathbb{S}^2 со слоем \mathbb{S}^1 . Рассмотрим декартово произведение $\mathbb{S}^2 \times [0; 1]$. Пусть α — инволюция сферы \mathbb{S}^2 , полученная отражением от экваториальной плоскости. отождествим точки $(s; 0)$ и $(\alpha(s); 1)$ при каждом s . Полученное пространство является трехмерным многообразием, которое можно наделять структурой геометрии (см. задачу 16.5). Эту геометрию можно отобразить на двумерную сферу по формуле

$$\mathbb{S}^2 \times [0; 1) \ni (s; t) \mapsto s \in \mathbb{S}^2,$$

и это отображение будет морфизмом геометрий со слоем \mathbb{S}^1 . В курсах топологии морфизм из п. 16.2.2 называют тривиальным \mathbb{S}^1 -расслоением (он является проектированием параллельно множителю \mathbb{S}^1 декартова произведения $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ на \mathbb{S}^2), а морфизм из данного пункта — нетривиальным расслоением.

§ 16.3. Группы Ли

Этот параграф не является введением в (очень богатую) теорию групп Ли. Он лишь содержит основные определения и несколько примеров, которые используются в дальнейшем. Чтобы понять этот параграф, читатель должен знать кое-что из линейной алгебры и быть знакомым с понятиями гладкого многообразия, гладкого отображения и диффеоморфизма.

16.3.1. Основные определения. *Группа Ли* — это гладкое многообразие G , которое является также группой, причем отображения $G \times G \rightarrow G$ и $G \rightarrow G$ вида $(g, h) \mapsto gh$ и $g \mapsto g^{-1}$ гладкие. Другими словами, это геометрия группы G , которая состоит из точек гладкого многообразия и действует гладко на себе умножениями справа. Таким образом, группы Ли — это геометрии, а их морфизмы — это, по определению, морфизмы соответствующих геометрий.

Пусть E и B — группы Ли, $p: E \rightarrow B$ — сюръективный морфизм, $B_1 \subset B$ — подгруппа Ли; тогда *ограничение морфизма p на B_1* (обозначение: $p|_{B_1}$), определяется естественным образом. Более общим образом, если $f: A \rightarrow B$ — морфизм групп Ли, то *обратный образ для p* , определяется так:

$$E_1 := \{(a, e) \in A \times E : f(a) = p(e)\} \quad \text{и} \quad f^*p((a, e)) := f(a);$$

В этой ситуации существует канонический морфизм $E_1 \rightarrow E$, заданный формулами $\varphi(a) = f(a)$, $\Phi((a, e)) = e$.

На самом деле определение обратного образа можно дать в гораздо большей общности, чем для случая групп Ли. А именно, если $p: E \rightarrow B$ — сюръективное отображение, а $f: A \rightarrow B$ — произвольное отображение, то обратный образ f^*p определяется в точности так же, как выше.

16.3.2. Примеры групп Ли. 1. Простейшими примерами групп Ли служат группы \mathbb{R} , \mathbb{C} , \mathbb{R}^n , \mathbb{C}^n , действующие на себе сложением.

2. Классические группы $GL(n)$ (невырожденные линейные преобразования пространства \mathbb{R}^n), $O(n)$ и $SO(n)$ (ортогональные и, соответственно, сохраняющие ориентацию ортогональные преобразования пространства \mathbb{R}^n), $U(n)$ (эрмитовы преобразования пространства \mathbb{C}^n), известные из линейной алгебры, обладают очевидной структурой групп Ли.

3. Такие известные группы из различных областей математики, как группа $SL(n)$ и группа верхних треугольных матриц, имеют очевидную структуру групп Ли.

§ 16.4. Примеры геометрических векторных расслоений

Грассманианы (или грассмановы многообразия) G_k^n — это геометрии, которые являются естественным обобщением проективных пространств: их точки — это k -мерные подпространства в \mathbb{R}^n , причем в случае $k = 1$ получается пространство $\mathbb{R}P^{n-1}$. Для этих

геометрий существует красивая теория (включающая такие изящные объекты, как координаты Плюккера, клетки Шуберта и т. д.). Однако здесь мы не будем углубляться в эту теорию: наша цель — описать некоторые морфизмы геометрий, в которых грассманианы играют ключевую роль.

16.4.1. Определение многообразий Грассмана и Штифеля.

Многообразие Грассмана G_k^n есть множество, точками которого являются всевозможные k -мерные линейные подпространства L в n -мерном векторном пространстве над \mathbb{R} . Это множество имеет естественную структуру топологического пространства, гладкого многообразия, а также геометрическую структуру (определение последней см. в задаче 16.9).

Многообразие Штифеля V_k^n есть множество, точки которого — k -мерные ортонормированные реперы в евклидовом пространстве \mathbb{R}^n . Это множество имеет естественную структуру топологического пространства, гладкого многообразия, а также геометрическую структуру (определение последней см. в задаче 16.10).

16.4.2. Некоторые важные морфизмы. 1. *Каноническое расслоение Грассмана* $\gamma_k^m: E_k^m \rightarrow G_k^m$, где G_k^m — многообразие Грассмана,

$$E_k^m := \{(L, r) \in G_k^m \times \mathbb{R}^m : r \in L\},$$

а γ_k^m — естественная проекция $(L, r) \mapsto L$, является морфизмом геометрий, если E_k^m наделено естественной геометрической структурой (см. задачу 16.11). Его *слой* $(\gamma_k^m)^{-1}$ (точка) является k -мерным векторным пространством над \mathbb{R} .

2. Имеются очевидные включения $G_k^m \subset G_k^{m+1}$ и $E_k^m \subset E_k^{m+1}$, которые позволяют определить G_k^∞ , E_k^∞ , $\gamma_k^\infty: E_k^\infty \rightarrow G_k^\infty$, переходя к индуктивному пределу. Отображение γ_k^∞ , полученное таким образом, является морфизмом геометрий, который мы будем называть *бесконечным каноническим расслоением Грассмана*.

3. Морфизмом геометрий является и *расслоение Штифеля над грассманианом* $\sigma_k^m: V_k^m \rightarrow G_k^m$, который каждому реперу в V_k^m сопоставляет натянутое на него линейное подпространство.

16.4.3. Универсальность канонического грассманиана. Для некоторого класса геометрических морфизмов со слоем \mathbb{R}^k (мы здесь его не конкретизируем, см. [4, т. 2]) бесконечное каноническое расслоение Грассмана обладает следующим замечательным

свойством универсальности: для любого морфизма $\xi^k: E \rightarrow B$ из этого класса существует такой морфизм геометрий $p: B \rightarrow G_k^\infty$, что морфизм — обратный образ $p^*\gamma_k^\infty$ изоморфен ξ^k .

Таким образом, бесконечное каноническое расслоение Грассмана содержит, так сказать, всю информацию, нужную для построения всех морфизмов из обширного класса геометрических морфизмов со слоем \mathbb{R}^k . Отметим, что обратный образ строится эффективно, поэтому вышеприведенная теорема дает эффективный метод для построения новых морфизмов геометрий.

§ 16.5. Геометрические G -расслоения

В топологии G -расслоение — это отображение факторизации топологического пространства, на котором действует справа топологическая группа G , на пространство орбит этого действия. Здесь мы изучим частный случай понятия G -расслоения, когда вместо топологических пространств рассматриваются геометрии, а вместо топологических групп — группы Ли.

16.5.1. Основные определения. Пусть $(E: \Gamma)$ — геометрия, Γ — группа Ли, G — подгруппа в Γ ; под *геометрическим G -расслоением* $p: E \rightarrow B$ мы понимаем проекцию пространства E на пространство орбит $B = E/G$ действия группы G на E .

Морфизм (φ, Φ) геометрических G -расслоений $p_i: E_i \rightarrow B_i$, $i = 1, 2$, определяется как коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{\Phi} & E_2 \\ \downarrow p_1 & & \downarrow p_2 \\ B_1 & \xrightarrow{\varphi} & B_2, \end{array}$$

где φ и Φ — морфизмы геометрий. Морфизм геометрических G -расслоений является *изоморфизмом*, если φ и Φ — изоморфизмы геометрий.

Геометрическое G -расслоение $p: E \rightarrow B$ называется *главным*, если каждая орбита изоморфна G ; другими словами, *слой* расслоения p есть G .

16.5.2. Примеры. 1. Отождествление противоположных точек на n -мерной сфере является главным \mathbb{Z}_2 -расслоением над $\mathbb{R}P^2$.

2. Расслоение Хопфа (см. п. 16.2.1) является главным \mathbb{S}^1 -расслоением.

3. Естественная проекция многообразия Штифеля V_k^n на многообразие Грассмана G_k^n (см. п. 16.4.2 (3)) является главным $O(k)$ -расслоением.

4. Каноническое расслоение Грассмана $\gamma_k^m: E_k^m \rightarrow G_k^m$ является геометрическим $GL(k)$ -расслоением, но не главным. Его слой есть \mathbb{R}^k .

§ 16.6. Конструкция Милнора

Конструкция Милнора связывает с каждой группой Ли G (на самом деле — с каждой топологической группой) геометрический морфизм ω_G , позволяющий классифицировать все геометрические G -расслоения над данной геометрией B . Конструкция основана на понятии *джойна* (см., например, [4, т. 1]). *Джойн* двух топологических пространств X и Y , обозначаемый $X * Y$, — это факторпространство пространства $X \times [0, 1] \times Y$ по отношению эквивалентности

$$(x, 0, y) \sim (x', y), \quad (x, 1, y) \sim (x, 1, y').$$

Например, $[0, 1] * [0, 1]$ — это трехмерный симплекс, а $\mathbb{S}^1 * \mathbb{S}^1$ — трехмерная сфера. Последний пример — это красивый геометрический факт, который должен быть понятен каждому математику, как и (связанный с ним) факт, что трехмерную сферу можно склеить из двух «сцепленных полных торов».

16.6.1. Конструкция. Пусть G — группа Ли, а

$$E_G(n) := G * G * \dots * G \quad (n \text{ множителей})$$

— n -кратный джойн группы G с собой. Очевидно,

$$G \subset E_G(2) \subset E_G(3) \subset \dots \subset E_G(n) \subset \dots \subset E_G,$$

где E_G — индуктивный предел объектов $E_G(n)$ при $n \rightarrow \infty$.

Рассмотрим действие группы G на E_G правыми сдвигами. Соответствующее расслоение

$$\omega_G: E_G \rightarrow B_G = E_G/G$$

называется *универсальным геометрическим G -расслоением*, а его база — *классифицирующим пространством группы Ли G* . Аналогично определяется расслоение $\omega_G^n: E_G^n \rightarrow B_G^n$, которое кратко называется *n -универсальным G -расслоением*, а его база называется *n -классифицирующим пространством группы G* (в не столь кратком виде — *классифицирующим пространством для размерностей не выше n*).

16.6.2. Примеры. 1. Классифицирующее пространство группы \mathbb{S}^1 есть $\mathbb{C}P^\infty$, а соответствующее универсальное расслоение имеет вид

$$\omega_{\mathbb{S}^1} : E_{\mathbb{S}^1} = \mathbb{S}^\infty \rightarrow \mathbb{C}P^\infty;$$

k -классифицирующее пространство группы \mathbb{S}^1 есть $\mathbb{C}P^k$, и $E_{\mathbb{S}^1}^k = \mathbb{S}^{2k+1}$.

2. Классифицирующее пространство группы \mathbb{Z}_2 есть $\mathbb{R}P^\infty$, при этом $E_{\mathbb{Z}_2} = \mathbb{S}^\infty$; k -классифицирующее пространство группы \mathbb{Z}_2 есть $\mathbb{R}P^k$, и $E_{\mathbb{Z}_2}^k = \mathbb{S}^k$.

16.6.3. Свойство универсальности. Для некоторого класса геометрических главных G -расслоений (мы здесь его не конкретизируем, см. [4, т. 2]) универсальное геометрическое G -расслоение обладает следующим замечательным свойством универсальности: для любого геометрического главного G -расслоения $\xi_G : E \rightarrow B$ этого класса существует такой морфизм геометрий $p : B \rightarrow G_k^\infty$, что обратный образ $p^* \gamma_k^\infty$ изоморфен ξ_G .

Таким образом, универсальное геометрическое G -расслоение содержит, так сказать, всю информацию, нужную для построения всех G -расслоений из обширного класса геометрических главных G -расслоений. Поскольку обратный образ строится эффективно, вышеприведенная теорема дает эффективный метод для построения новых примеров геометрических главных G -расслоений.

§ 16.7. Задачи

16.1. Даны два отображения w_k и w_l (см. п. 16.1.3). Найдите самое нижнее отображение w_n , которое выше, чем каждое из них.

16.2. Докажите свойство универсальности экспоненциального отображения, т. е. покажите, что оно выше, чем любое другое отображение w_n (см. п. 16.1.5).

16.3. Докажите, что комплексная проективная прямая $\mathbb{C}P^1$ как геометрия изоморфна сфере \mathbb{S}^2 .

16.4. Укажите группу преобразований, которая наделяет декартово произведение $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^2$ его естественной геометрической структурой.

16.5. Укажите группу преобразований, которая наделяет многообразие, построенное в п. 16.2.3, его естественной геометрической структурой.

16.6. Дайте точное определение метрики плоского тора.

16.7. Определите геометрию бесконечного плоского цилиндра $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$. Покажите, что существует несчетное множество различных геометрических морфизмов со слоем \mathbb{Z} плоского цилиндра на плоский тор. Сколько существует неизоморфных морфизмов такого рода?

16.8*. Покажите, что накрытие плоского тора плоскостью обладает свойством универсальности аналогично экспоненциальному отображению.

16.9. На многообразии Грассмана G_k^n введите структуры топологического пространства, гладкого многообразия и геометрии.

16.10. На многообразии Штифеля V_k^n введите структуры топологического пространства, гладкого многообразия и геометрии.

16.11. Введите естественную геометрическую структуру на множестве E_k^m (см. п. 16.4.2).

16.12*. Опишите такое отображение $f: \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{C}P^\infty$, что $f^* \omega_{\mathbb{S}^1}$ есть отображение w_n .

Дополнение А

Извлечения из «Начал» Евклида

В этом дополнении мы приведем некоторые извлечения из книги I «Начал» Евклида, посвященной планиметрии (рус. пер. [5]), снабдив их комментариями. По ощущению автора, комментарии абсолютно необходимы, так как многие высказывания в «Началах» звучат очень странно для современного читателя, чье восприятие задано, чтобы не сказать искажено, современным изложением математики. На самом деле, как мы увидим, словоупотребления Евклида вполне естественны, если только понимать, как древние греки трактовали геометрию.

Во-первых, вспомним, что корень «гео» означает Землю, корень «метр» означает измерение, так что планиметрия Евклида — это абстрактный вариант, мы бы сказали модель, деятельности землемера, работающего не с реальным ландшафтом, а с куском бумаги (точнее, папируса). Во-вторых, современники Евклида не различали, как мы, геометрию и физику; на самом деле в то время не существовала наука, которая называется физикой, и планиметрия служила двумерной физической моделью нашей Вселенной. А книги XI—XIII «Начал», посвященные стереометрии, были для древних греков не чем иным, как теорией их (трехмерного) физического пространства.

Постулаты книги I

Постулаты Евклида (мы бы назвали их аксиомами) — это не абстрактные утверждения о точках, прямых и окружностях, они просто указывают (за исключением постулата IV), какие построения может сделать геометр (т. е. землемер) на своем папирусе. Евклид пишет:

Допустим: I. Что от всякой точки до всякой точки (можно) провести прямую линию.

II. И что ограниченную прямую (можно) непрерывно продолжать по прямой.

III. И что из всякого центра и всяким раствором (может быть) описан круг.

IV. И что все прямые углы равны между собой.

V. И если прямая, падающая на две прямые, образует внутренние и по одну сторону углы, меньшие двух прямых, то продолженные эти две прямые неограниченно встретятся с той стороны, где углы меньшие двух прямых.

Разумеется, наш землемер не может начертить бесконечную прямую, и выражение «прямая» в постулатах I, II, V означает в нашей терминологии «отрезок прямой», а именно это делает постулат II необходимым. (Отметим, что этот постулат невозможно превратить в содержательное утверждение в современной терминологии.)

Отметим далее, что в постулатах I, II, III не содержится никаких утверждений о единственности. Это вполне естественно, поскольку все три постулата являются предписаниями о допустимых, корректно определенных действиях землемера, так что для современников Евклида само собой подразумевалось, что существует только один способ выполнить эти действия.

Постулат III выглядит для нас излишним, мы бы просто *определили* окружность как геометрическое место точек, лежащих на данном расстоянии (радиусе) от данной точки (центра окружности). Но для древних греков это было содержательное утверждение о том, что начертить окружность — операция допустимая и корректно определенная. Нужно также помнить, что для древних греков окружность, как и прямая, — не множество точек, а некая геометрическая сущность.

Постулат IV отличается от остальных четырех в том отношении, что это не руководство к действию, а наблюдение. В нем употреблено слово «равны». Что оно означает? Следует ли понимать его как «конгруэнтны»? Ниже мы вернемся к этому вопросу.

И наконец, некоторые комментарии к пятому постулату (который однажды был назван «самым важным утверждением в истории науки»). Более удачная с современной точки зрения формулировка этой аксиомы, а именно: *через данную точку проходит одна и только одна прямая, параллельная данной*, для Евклида абсолютно неприемлема. В самом деле, она использует понятие бесконечной прямой (которую геометр не может начертить) и является по существу отрицательным утверждением, согласно которому *не существует* общей точки у двух определенных (бесконечных!) прямых линий. Напротив, вариант Евклида очень конструктивен: он утверждает, что если геометр выполняет определенные действия, то он получит точку пересечения двух прямых, и даже характеризует местонахождение этой точки.

Общие понятия

Для нас «общие понятия» Евклида выглядят как аксиомы, уточняющие значение слова «равны», но что имел в виду Евклид? Вот что он говорит:

1. *Равные одному и тому же равны и между собой.*
2. *И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.*
3. *И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.*
4. *И совмещающиеся друг с другом равны между собой.*
5. *И целое больше части.*

С современной точки зрения первое и четвертое общие понятия выражают транзитивность и рефлексивность отношения равенства, так что (если добавить симметрию, без сомнения молчаливо подразумеваемую древними греками) получается определение отношения эквивалентности в теоретико-множественном смысле.

Но что это за объекты, которые присутствуют (явно и неявно) во всех вышеприведенных утверждениях? Это геометрические сущности или числа (например, длины отрезков), как подсказывают второе и третье утверждения? На самом деле и то и другое: надо помнить, что у древних греков не было теории вещественных чисел, отрезки (и их длины) *были* вещественными числами. Поэтому когда Пифагор открыл иррациональность числа $\sqrt{2}$, этот факт был сформулирован как несоизмеримость двух отрезков: диагонали и стороны единичного квадрата. Но рассматриваемые объекты могут быть не только отрезками прямой, но и углами (их мерой), площадями фигур и т. д.

Наконец, что означает слово «равны»? Конгруэнтны? Что значит слово «больше» в последнем общем понятии? Это трудные вопросы, но надо иметь в виду, что Евклид нигде не упоминает о преобразованиях плоскости, в книге I нет параллельных переносов, поворотов, наложений треугольников, так что в ней нигде нет намеков на подход Клейна, основанный на преобразованиях. Так, равные треугольники — это те, которые имеют три соответственно равные стороны, а также соответственно равные углы. Тем не менее в доказательстве признаков равенства треугольников появляется некое рассуждение о «наложении». Не столь ясно, что означают слова «прибавляются» и «отнимаются» в общих понятиях 2 и 3, но, судя

по некоторым доказательствам в книге I, они относятся к объединению и теоретико-множественной разности геометрических объектов, хотя, разумеется, такие сущности, как углы и отрезки прямых, не определяются как множества точек.

Определения из книги I

Мы отметили в гл.11, что древние греки осознали: чтобы развивать геометрию как дедуктивную науку, основанную на строгих доказательствах без логических порочных кругов, нужно вначале сформулировать некоторые утверждения без доказательства — *постулаты* (в нашей терминологии — аксиомы). Однако они не применяли те же соображения к определениям и потому не считали, в отличие от нас, что в строгой математической теории, чтобы определить одни понятия в терминах других без порочных кругов, нужно начать с исходных *неопределяемых понятий*, которые лишь именуются и никак не уточняются.

Но не следует считать отсутствие неопределяемых понятий у Евклида логическим дефектом его изложения. В действительности рассматриваемые геометрические сущности были для Евклида предметами физического мира и могли быть содержательно описаны как таковые. Давайте посмотрим, как он их описывает.

1. *Точка есть то, что не имеет частей.*
2. *Линия же — длина без ширины.*
3. *Концы же линии — точки.*
4. *Прямая линия есть та, которая равно расположена по отношению к точкам на ней.*
5. *Поверхность есть то, что имеет только длину и ширину.*
6. *Концы же поверхности — линии.*
7. *Плоская поверхность есть та, которая равно расположена по отношению к прямым на ней.*

Меня всегда поражала красота и глубина этих описаний. Пожалуй, самое поразительное то, что первые определяемые понятия (за исключением прямой линии в определении 4 и плоскости в определении 7) являются основными *чисто топологическими* понятиями: это точки, линии (кривые), поверхности и концы (мы бы сказали — операторы взятия границы).

Понятие точки (определяемой как неразложимая сущность) близко к физике (точки определяются подобно атомам). Описание

прямой линии обладает таинственной красотой. Не является ли оно поэтическим аналогом идеи геодезической линии? Или инвариантности относительно сдвигов по себе?

Далее Евклид дает описание углов, образованных кривыми и прямыми, которое звучит довольно поэтично.

8. *Плоский же угол есть наклонение друг к другу двух линий, в плоскости встречающихся друг с другом, но не расположенных по <одной> прямой.*

9. *Когда же линии, содержащие угол, прямые, то угол называется прямолинейным.*

Здесь прежде всего надо заметить, что Евклид начинает с самого общего случая угла между кривыми (а не прямыми). Нужно также заметить, что определение прямолинейного угла 9 — это первая у Евклида характеристика основного понятия, которую можно считать математическим определением в современном смысле, в противоположность восьми предыдущим, которые являются просто интуитивными описаниями. Заметим еще, что из определения неясно, что такое в действительности угол (скажем, прямолинейный): пара прямых, или пара лучей, или часть плоскости, ограниченная ими.

Следующие три определения (также относящиеся к углам) тоже можно считать математическими в современном смысле, если разрешить употребление общих понятий «равны», «больше», «меньше».

10. *Когда же прямая, восстановленная на (другой) прямой, образует рядом углы, равные между собой, то каждый из равных углов есть прямой, а восстановленная прямая называется перпендикуляром к той, на которой она восстановлена.*

11. *Тупой угол — больший прямого.*

12. *Острый же — меньший прямого.*

Отметим, что в определении 10 в действительности определены два разных (хотя тесно связанных) понятия: прямые углы и перпендикуляры.

Следующие два определения замечательны своей топологической общностью.

13. *Граница есть то, что является окончечностью чего-либо.*

14. *Фигура есть то, что содержится внутри какой-нибудь или каких-нибудь границ.*

Слово «концы» до этого появляется в определениях 3 и 6. Оно явно легче понималось современниками Евклида, чем его синоним «граница», поэтому Евклид использует его в описательном опре-

делении понятия границы (определение 13). Отметим также, что в определении 14 неявно предполагается, что граница связна (в нашей терминологии). В этом определении принципиально важно, что используется выражение «содержится внутри», а не «содержится в»; в этом контексте мы бы сказали «ограничено», но едва ли это слово можно использовать в формулировке определения 14, которое бы тогда явно звучало как тавтология.

Следующие четыре определения относятся к кругам.

15. *Круг есть плоская фигура, содержащаяся внутри одной линии [(которая называется окружностью)], на которую все из одной точки внутри фигуры падающие прямые равны между собой.*

16. *Центром же круга называется эта точка.*

17. *Диаметр же круга есть какая угодно прямая, проведенная через центр и ограничиваемая с обеих сторон окружностью круга, она же и рассекает круг пополам.*

18. *Полукруг же есть фигура, содержащаяся между диаметрами отсекаемой им (части) окружности. Центр же полукруга — то же самое, что и у круга.*

Разумеется, надо иметь в виду, что, как и прежде, «прямая линия» означает «отрезок прямой» (в современной терминологии).

Следующие четыре определения относятся к различным многоугольникам, включая треугольники, квадраты, прямоугольники (которые Евклид называет «разносторонниками») и другие типы четырехугольников.

19. *Прямолинейные фигуры суть те, которые содержатся между прямыми, трехсторонние — между тремя, четырехсторонние же — четырьмя, многосторонние же — которые содержатся между более чем четырьмя прямыми.*

20. *Из трехсторонних фигур равносторонний треугольник есть фигура, имеющая три равные стороны, равнобедренный же — имеющая только две равные стороны, разносторонний же — имеющая три неравные стороны.*

21. *Кроме того, из трехсторонних фигур прямоугольный треугольник есть имеющий прямой угол, тупоугольный же — имеющий тупой угол, а остроугольный — имеющий три острых угла.*

22. *Из четырехсторонних фигур квадрат есть та, которая и равносторонняя, и прямоугольная, разносторонник же — прямоугольная, но не равносторонняя, ромб — равносторонняя, но не прямоугольная, ромбоид (параллелограмм) — имеющая противополож-*

ные стороны и углы, равные между собой, но не являющаяся ни равносторонней, ни прямоугольной.

Остальные же четырехсторонники будем называть трапециями.

Определения 19–22 организованы с хорошим вкусом, их симметричное повторение почти поэтично и радует даже современное ухо. Читатель наверняка отметил употребление необычных терминов: «прямолинейная фигура» вместо «многоугольника», «ромбоид» вместо «параллелограмма» (точнее, ромбоид — это параллелограмм общего вида, т. е. не ромб и не прямоугольник). Интересно, что предметом всех определений 19–22 являются фигуры общего вида: в противоположность современной терминологии элементарной геометрии, для Евклида квадрат не является частным случаем прямоугольника (разносторонника), прямоугольник не является частным случаем ромбоида и т. д.

Евклид завершает свой список определений ключевым определением параллельных прямых.

23. *Параллельные суть прямые, которые, находясь в одной плоскости и будучи продолжены в обе стороны неограниченно, ни с той, ни с другой «стороны» между собой не встречаются.*

Отметим, что определение 23 — совершенно строгое математическое определение, но оно не утверждает существование параллельных прямых.

Почему Евклид отложил это определение до самого конца своего перечня? В нем явно не используются термины из определений 7–22, так почему же он не поместил его раньше, скажем сразу после определения 7? Мне представляется, что причиной этого была его нелюбовь к пятому постулату, без которого он пытается обойтись пока может. Поэтому слово «параллельные» впервые появляется в формулировках предложений книги I только в предложении 27, а возможность построения (существование) параллельных не утверждается вплоть до предложения 31.

Предложения из книги I

Здесь мы сформулируем теоремы (предложения) евклидовой планиметрии в порядке их появления у Евклида, без доказательств и чертежей и с минимумом комментариев. Ключевую роль здесь играет порядок, в котором доказываются предложения. Читатель наверняка заметит, что многие предложения утверждают возмож-

ность выполнения конкретных геометрических конструкций (так что их можно понимать как теоремы существования); однако можно показать, что в утверждениях о возможности построения во многих случаях молчаливо предполагается, что конструкция корректно определена. Это означает, что часто такие предложения понимались древними греками как теоремы существования *и единственности*.

1. На данной ограниченной прямой построить равносторонний треугольник.

Разумеется, построение выполнялось с помощью циркуля (так что постулат 3 применялся дважды), а тот факт, что две построенные окружности пересекаются, считался очевидным (каковым он и является).

2. От данной точки отложить прямую, равную данной прямой.

3. Из двух заданных неравных прямых от большей отнять прямую, равную меньшей.

Разумеется, в этих трех утверждениях, как и в последующих, слово «прямая» означает «отрезок прямой» (в нашей терминологии).

4. Если два треугольника имеют по две стороны, равные каждой, и по равному углу, содержащемуся между равными прямыми, то они будут иметь и основание, равное основанию, и один треугольник будет равен другому, и остальные углы, стягиваемые равными сторонами, будут равны остальным углам каждый каждому.

Это «первый признак равенства треугольников», знакомый старшеклассникам во всем мире. Отметим, что в этом предложении не упоминается конгруэнтность или какое-либо движение или наложение. Не думаю, что Евклид, говоря «один треугольник будет равен другому», подразумевал какое-то совмещение, и конец предложения просто объясняет, что подразумевается под равными треугольниками: равенство всех их соответствующих элементов (сторон и углов).

5. У равнобедренных треугольников углы при основании равны между собой, и по продолжении равных прямых углы под основанием будут равны между собой.

Читатель заметит употребление слова «основание» в последних двух предложениях и слова «под» в последнем, что, разумеется, означает, что Евклид сопровождал предложения чертежами, на которых «основания» треугольников изображены горизонтальными прямыми.

6. Если в треугольнике два угла равны между собой, то будут равны между собой и стороны, стягивающие равные углы.

Предложение 6 обратно к предложению 5. Во многих школьных курсах геометрии оба предложения объединены в теорему вида «тогда и только тогда».

7. На одной и той же прямой нельзя построить двух прямых, равных каждая двум другим прямым и (сходящихся) одни в одной точке, другие в другой, так, чтобы эти прямые находились бы по одну сторону и имели бы одни и те же концы с первоначальными прямыми.

Это утверждение приводит ко «второму признаку равенства треугольников», требующему некоторых рассуждений (нужно рассмотреть два случая, так как треугольники могут быть противоположно ориентированы). Примечательно, что Евклид сначала формулирует это как теорему единственности, употребляя выражение «по одну сторону», чтобы избавиться от неединственности. Отметим, что это выражение впервые появляется в другом контексте, а именно в формулировке пятого постулата.

8. Если два треугольника имеют две стороны, равные каждая каждой двум сторонам, имеют также и основание, равное основанию, то они будут иметь и угол, равный углу, заключенному между равными прямыми.

Читатель должен был заметить, что условие здесь то же, что в «третьем признаке равенства треугольников» из школьного курса геометрии. Однако заключение в этом предложении слабее (чем в «признаке»), оно утверждает равенство лишь одного угла, а не трех. Любопытно присутствие термина «основание» — это не строгий математический термин, он просто показывает, что Евклид и его последователи чертили одну из сторон треугольника горизонтально и называли ее основанием треугольника.

9. Данный прямолинейный угол рассечь пополам.

10. Данную ограниченную прямую рассечь пополам.

11. К данной прямой из заданной на ней точки провести прямую под прямыми углами.

Теоремы 9—11 доказываются простыми построениями с помощью циркуля и линейки.

12. К данной неограниченной прямой из заданной точки, на ней не находящейся, провести перпендикулярную прямую линию.

В XX веке при аксиоматическом построении планиметрии это ключевое предложение (с добавлением явного указания на единственность) часто берут в качестве одной из аксиом. Заметим, что

здесь употреблено выражение «неограниченная прямая», а не просто «прямая» (в значении отрезка), поскольку иначе утверждение ложно.

13. Если прямая, восставленная на прямой, образует углы, то она будет образовывать или два прямых, или (вместе) равные двум прямым.

Разумеется, под «углами, вместе равными двум прямым», Евклид понимает углы, сумма которых равна двум прямым.

14. Если с некоторой прямой в какой-нибудь ее точке две прямые, расположенные не по одну и ту же сторону, образуют смежные углы, равные (вместе) двум прямым, то эти прямые по отношению друг к другу будут по одной прямой.

Может быть, эта теорема малопонятна читателю. В современной терминологии она утверждает, что если два отрезка прямых с общим концом A на прямой l образуют с прямой l углы, сумма которых равна 180° , то эти два отрезка лежат на одной прямой.

15. Если две прямые пересекаются, то образуют углы через вершину, равные между собой.

16. Во всяком треугольнике при продолжении одной из сторон внешний угол больше каждого из внутренних, (ему) противолежащих.

17. Во всяком треугольнике два угла, взятые вместе при всяком их выборе, меньше двух прямых.

Отметим, что эта теорема показывает, что мы не в эллиптической геометрии, но она не противоречит гиперболической геометрии (Евклид до сих пор не использует пятый постулат в доказательствах).

18. Во всяком треугольнике большая сторона стягивает больший угол.

19. Во всяком треугольнике больший угол стягивается и большей стороной.

20. Во всяком треугольнике две стороны, взятые вместе при всяком их выборе, больше оставшейся.

В современной формулировке это основополагающее утверждение известно как «неравенство треугольника», ключевой пункт в определении метрического пространства.

21. Если в треугольнике на одной из сторон от концов восставлены будут внутрь две прямые, то восставленные прямые (вместе) будут меньше двух остальных сторон треугольника, но будут заключать больший угол.

22. Из трех прямых, которые равны трем данным [прямым], составить треугольник; нужно, однако, чтобы две (прямые, взятые вместе), при всяком их выборе были бы больше оставшейся [вследствие того, что во всяком треугольнике две стороны, (взятые вместе) при всяком их выборе, больше оставшейся].

Это «третий признак равенства треугольников», но он также содержит явную формулировку неравенства треугольника.

23. На данной прямой при данной ее точке построить прямолинейный угол, равный данному прямолинейному углу.

24. Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, но заключенный между равными сторонами угол (в одном) больше, (чем в другом), то и основание (в первом) будет больше основания (во втором).

25. Если два треугольника имеют две стороны, равные двум сторонам каждая каждой, основание же (в одном) больше, чем основание (в другом), то и угол, заключенный между равными прямыми (в первом), больше угла (во втором).

О термине «основание» см. замечание после предложения 8.

26. Если два треугольника имеют два угла, равные двум углам каждый каждому, и одну сторону, равную одной стороне, либо заключающейся между равными углами, либо стягивающей один из равных углов, то они будут иметь и остальные стороны равными остальным сторонам [каждая каждой], и оставшийся угол оставшемуся углу.

Это «второй признак равенства треугольников» в полной общности, и он применяется в доказательстве следующего предложения.

27. Если прямая, падающая на две прямые, образует накрест лежащие углы, равные между собой, то прямые будут параллельны друг другу.

Лишь в этом месте у Евклида впервые впервые (не считая определения) появляется слово «параллельны».

28. Если прямая, падающая на две прямые, образует внешний угол, равный внутреннему противолежащему с той же стороны, или внутренние односторонние (углы вместе), равные двум прямым, то прямые будут параллельны между собой.

29. Прямая, падающая на параллельные прямые, образует накрест лежащие углы, равные между собой, и внешний угол, равный внутреннему, противолежащему с той же стороны, и внутренние односторонние углы, (вместе) равные двум прямым.

30. *⟨Прямые⟩, параллельные той же прямой, параллельны и между собой.*

31. *Провести через данную точку прямую линию, параллельную данной прямой.*

Здесь Евклид вновь обращается (после долгого перерыва) к утверждению о том, что наш «землемер» может выполнить некоторое построение. Отметим, что это предложение близко к формулировке «аксиомы о параллельных», которая обычно присутствует в школьном курсе геометрии. Евклид не утверждает явно, что построение единственно; однако, как пояснено выше, единственность построения обычно неявно подразумевалась в утверждениях такого типа.

32. *Во всяком треугольнике по продолжении одной из сторон внешний угол равен двум внутренним и противолежащим, и внутренние три угла треугольника (вместе) равны двум прямым.*

Это одна из ключевых теорем евклидовой геометрии (которая отличает ее от эллиптической и гиперболической). Для ее доказательства нужно, применив предложение 31, провести прямую, параллельную основанию, через противоположную вершину и, применив предложение 29, сравнить углы, образовавшиеся при этой вершине, с внутренними углами при основании.

33. *Прямые, соединяющие с одной и той же стороны равные и параллельные <прямые>, и сами равны и параллельны.*

34—45. Эти двенадцать предложений относятся к построениям параллелограммов и треугольников, использующим параллельные прямые. Говоря в этих предложениях о равенстве треугольников и параллелограммов, Евклид имеет в виду равенство площадей (а не то, что мы называем изометрией или наложением при движении). Поэтому фраза (из предложения 41) «параллелограмм будет вдвое большим треугольника» означает, что площадь некоторого параллелограмма вдвое больше площади некоторого треугольника.

46. *На данной прямой надстроить квадрат.*

Вспомним, что самое первое предложение утверждало возможность построения «совершенного треугольника» (т. е. равностороннего). Теперь, почти в конце книги I, Евклид показывает, что можно построить «совершенный четырехугольник», т. е. квадрат. Эти поиски совершенства характерны не только для древнегреческой математики (вспомним платоновы тела), но и для древнегреческого искусства и культуры в целом.

47. В прямоугольных треугольниках квадрат на стороне, стягивающей прямой угол, равен (вместе взятым) квадратам на сторонах, заключающих прямой угол.

Это знаменитая теорема Пифагора. Отметим, что это предложение чисто геометрическое, в нем не говорится, что $a^2 + b^2 = c^2$, а утверждается, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей двух квадратов, построенных на двух других сторонах. Доказательство Евклида отличается от обычного (известного в ряде стран как «Пифагоровы штаны»: разрежем квадраты, построенные на катетах прямоугольного треугольника, на треугольники, которые складываются в квадрат, построенный на гипотенузе) — Евклид разрезает квадрат, построенный на гипотенузе, на два прямоугольника, продолжив высоту, проведенную из вершины прямого угла, и показывает, что площадь каждого из этих прямоугольников равна площади соответствующего квадрата.

48. Если в треугольнике квадрат на одной стороне равен (вместе взятым) квадратам на остальных двух сторонах, то заключенный между остальными двумя сторонами треугольника угол есть прямой.

Таким образом, Евклид завершает книгу I утверждением, обратным теореме Пифагора.

Заключение

Среди математиков стало привычным смотреть на Евклида свысока и критиковать отсутствие строгости в его построении геометрии. На мой взгляд, такое отношение лишь демонстрирует узость мышления этих критиков, абсолютизацию ими того уровня строгости, который был принят в XIX веке. Здесь я попытался показать, что «Начала» Евклида имеют свою внутреннюю логику и, в отличие от современных аксиоматических теорий, обладают потрясающей красотой, которая делает книгу Евклида одним из величайших достижений человеческой культуры.

Дополнение Б

Аксиомы планиметрии Гильберта

В этом дополнении приведены аксиомы планиметрии Гильберта, которые он впервые представил в серии лекций в Гёттингенском университете в 1898—1899 гг. Следуя Гильберту (русский перевод его знаменитых «Оснований геометрии» см. в [3]), докажем непротиворечивость его теории (т. е. покажем, что в ней нет противоречий, если их нет в теории алгебраических чисел).

Аксиомы Гильберта составляют первое строгое (в нашем современном понимании этого слова) изложение планиметрии в аксиоматической форме. К моменту публикации аксиоматики Гильберта было общеизвестно, что возможно строгое построение планиметрии в рамках теории вещественных чисел с помощью декартовых координат, а это превращает планиметрию в частный случай линейной алгебры над \mathbb{R} . Более того, к тому времени Герман Вейль показал, что на этой же основе можно построить геометрию, не используя координат. Тем не менее работа Гильберта была весьма значительным прорывом в понимании геометрии и остается важной вехой в истории математики.

Главная отличительная черта подхода Гильберта в том, что он понял и осуществил следующую идею: при строгом изложении математической теории *некоторые исходные понятия и отношения должны остаться неопределяемыми*, так как иначе неизбежен логический порочный круг в определениях. В его изложении неопределяемыми понятиями являются «точка», «прямая», «плоскость», «принадлежит», «лежит между» и «конгруэнтен». Неявное определение этих неопределяемых понятий в некотором смысле дано аксиомами.

В книге [3] Гильберт не только перечисляет аксиомы, но и приводит основные факты планиметрии в том порядке, в каком их можно вывести из аксиом. При этом в изложении Гильберта аксиомы стереометрии не отделены от аксиом планиметрии; поэтому в нашем изложении просто опущены аксиомы (или части аксиом), которые относятся к стереометрии (и соответственно изменена нумерация аксиом).

В этом дополнении, как и в предыдущем, мы рассматриваем и комментируем аксиоматику планиметрии с точки зрения историка. Как объяснено во введении, это основано на авторском предпочтении: я верю, что евклидову геометрию не следует преподавать как набор следствий из системы аксиом Евклида или Гильберта. По этой причине, хотя мы буквально воспроизводим текст аксиом, мы заменили математические комментарии Гильберта к его аксиомам и их следствиям на замечания исторического характера.

І. Аксиомы соединения (принадлежности)

Эта первая группа аксиом устанавливает соотношения между неопределяемыми понятиями *точка* и *прямая*, выраженные посредством (также неопределяемого!) понятия *принадлежит*. Очень важно понимать, что в изложении Гильберта прямая — это прямая (неопределяемое понятие), а не множество точек, как нас учили!

Что касается отношения «принадлежит», у него много синонимов: вместо «точка A принадлежит прямой l » можно сказать « l проходит через A », « l содержит A », « A является точкой прямой l » и т. д. Если A принадлежит прямой l и другой прямой m , то мы говорим « A — общая точка прямых l и m » или «прямые l и m пересекаются в точке A » и т. д. Если две точки A и B принадлежат прямой l , можно также сказать « l соединяет A и B », « A и B определяют l » и т. д.

І₁. Любые две различные точки A и B полностью определяют некоторую прямую a .

Обозначение: $AB = a$ или $BA = a$.

Гильберт объясняет, что означает в его геометрии фраза « A и B определяют a », но что означает «полностью определяют» — остается необъясненным. Надо ли понимать это выражение как условие единственности прямой, которую определяют A и B ? Несомненно нет, поскольку следующая аксиома — это аксиома единственности. Если подойти очень формально, следует заметить, что на этом этапе мы не знаем, что две различные точки действительно существуют. Но будет разумно предположить, что непустота множества точек и множества прямых молчаливо предполагается Гильбертом.

І₂. Любые две различные точки прямой полностью определяют эту прямую: если $AB = a$ и $AC = a$, причем $B \neq C$, то и $BC = a$.

Таким образом, если $AB = a$ и $AC = a$, где $B \neq C$, то и $BC = a$.

Отметим, что на этом этапе мы не знаем, что на любой прямой существуют три различные точки A , B , C , а на самом деле даже

не знаем, что существуют две. Последнее допущение появляется у Гильберта лишь в третьей аксиоме соединения.

И₂. На прямой существуют по крайней мере две точки. Существуют по крайней мере три точки, не лежащие на одной прямой.

Одно из основных следствий этих аксиом состоит в том, что две различные прямые имеют не больше одной общей точки.

Аксиомы соединения выполнены в конечной геометрии, состоящей из трех «прямых», каждая из которых состоит из двух точек, причем любые две прямые имеют одну общую точку.

II. Аксиомы порядка

В этой группе аксиом появляется, кроме уже упомянутых неопределяемых понятий (точка, прямая) и отношения «принадлежит», новое неопределяемое понятие «*лежит между*». Гильберт объясняет в своем комментарии, что это отношение является отношением порядка. Он даже приводит чертеж, на котором точка *B* лежит на прямой между точками *A* и *C*, как иллюстрацию первой аксиомы порядка, которая гласит:

П₁. Если точка B лежит между точкой A и точкой C, то A, B, C суть три различные точки прямой, и B лежит также между C и A.

П₂. Для любых двух точек A и C на прямой AC существует по крайней мере одна такая точка B, что точка C лежит между A и B.

Отметим, что из второй аксиомы порядка следует, что на каждой прямой существует бесконечное (не менее чем счетное) множество точек.

П₃. Среди любых трех точек прямой существует одна и только одна точка, лежащая между двумя другими.

Первые три аксиомы порядка позволяют Гильберту определить множество точек отрезка *AB* как множество точек, лежащих между *A* и *B*; сами точки *A* и *B* называются концами отрезка *AB*.

Понятие порядка позволяет также естественным образом определить то, что Гильберт называет полупрямой или лучом: луч, исходящий из точки *A* и проходящий через точку *B*, отличную от *A*, есть множество всех точек, лежащих на прямой *AB* по ту же сторону от *A*, что и *B*.

П₄. Пусть A, B, C — три точки, не лежащие на одной прямой, и a — прямая в плоскости ABC, не проходящая ни через одну из точек A, B, C; если при этом прямая a проходит через одну из точек

отрезка AB , то она должна пройти через одну из точек отрезка AC или через одну из точек отрезка BC .

Это утверждение известно как аксиома Паша.

Аксиомы порядка позволяют Гильберту определить понятие полуплоскости, хотя он никогда не использует этот теоретико-множественный термин, говоря о точках, лежащих с одной и той же стороны (или с разных сторон) от прямой на плоскости, а также с одной и той же стороны (или с разных сторон) от точки на прямой. Читатель здесь вспомнит, что в Евклидовых «Началах» выражение «с одной и той же стороны» нигде не определялось и, несомненно, считалось очевидным, в частности в пятом постулате.

Далее Гильберт определяет понятия ломаной и многоугольника, а как частные случаи последнего — треугольники, четырехугольники, пятиугольники, ..., n -угольники. Затем он формулирует теорему Жордана для многоугольников и утверждает, что она доказывается «без особых трудностей».

III. Аксиомы конгруэнтности

В этой группе аксиом появляется другое неопределяемое понятие, а именно конгруэнтность. В современных изложениях планиметрии оно обычно определяется явно: две фигуры конгруэнтны, если существует изометрия (т. е. отображение плоскости на себя, сохраняющее расстояния), переводящая одну из фигур в другую. Этот подход, разумеется, неприемлем для Гильберта, поскольку основан на понятии расстояния, которое нигде не появляется в аксиоматизации Гильберта. В его геометрии, как и у Евклида, нет фиксированной единицы измерения.

III₁. Если A, B суть две точки на прямой a и A' — точка на той же прямой или на другой прямой a' , то всегда можно найти точку B' , лежащую по данную от точки A' сторону прямой a' , и притом такую, что отрезок AB конгруэнтен, иначе говоря, равен отрезку $A'B'$. Конгруэнтность отрезка AB отрезку $A'B'$ обозначается следующим образом:

$$AB \equiv A'B'.$$

Каждый отрезок конгруэнтен самому себе, т. е. всегда

$$AB \equiv AB \quad \text{и} \quad AB \equiv BA.$$

Эту аксиому можно выразить короче, сказав, что каждый отрезок может быть однозначно определенным образом отложен по

данную сторону на данной прямой от данной точки. Отметим, что прямая a на самом деле не нужна в формулировке аксиомы. Обратим также внимание на выражение «всегда можно найти», которое заменяет более формальное «существует». Симметричность отношения конгруэнтности будет доказана позже. Что касается транзитивности, то она явно постулирована в следующей аксиоме.

III₂. Если отрезок $A'B'$ и отрезок $A''B''$ конгруэнтны одному и тому же отрезку AB , то отрезок $A'B'$ конгруэнтен также и отрезку $A''B''$; короче говоря, если два отрезка конгруэнтны третьему, то они конгруэнтны также друг другу.

Читатель легко покажет, что из аксиомы III₂ (вместе с III₁) вытекает рефлексивность отношения конгруэнтности.

Следующая аксиома утверждает, что, прикладывая к конгруэнтным отрезкам конгруэнтные, мы получаем конгруэнтные отрезки.

III₃. Пусть AB и BC суть два отрезка прямой a , не имеющие ни одной общей точки, и пусть, далее, $A'B'$ и $B'C'$ суть два отрезка той же прямой или другой прямой a' , также не имеющие общей точки; если при этом

$$AB \equiv A'B' \quad \text{и} \quad BC \equiv B'C', \quad \text{то и} \quad AC \equiv A'C'.$$

Первые три аксиомы конгруэнтности позволяют дать несколько строгих определений, связанных с понятием угла. Это, во-первых, определение угла как пары лучей (которые называются *сторонами* угла), начинающихся в одной и той же точке (которая называется *вершиной* угла) и лежащих на двух различных прямых; во-вторых, определение *внутренности* угла как множества всех точек плоскости, лежащих с той же стороны от каждого из лучей, образующих угол, что и другой луч.

В следующей аксиоме (неопределяемое) отношение конгруэнтности применяется к углам; аксиома утверждает, что можно «отложить» угол, конгруэнтный данному, по данную сторону от луча. В формулировке Гильберта [для плоскости]:

III₄. Пусть в плоскости даны угол (h, k) и прямая a' , а также вполне определенная по отношению прямой a' сторона плоскости. Пусть h' обозначает луч прямой a' , исходящий из точки O' ; в таком случае в плоскости существует один и только один луч k' , обладающий следующим свойством: угол (h, k) конгруэнтен, иначе говоря, равен углу (h', k') , и вместе с тем все внутренние точки угла (h', k') находятся по данную сторону от прямой a' . Конгруэнтность угла

(h, k) углу (h', k') обозначают так:

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h', k')$$

Каждый угол конгруэнтен самому себе, т. е. всегда

$$\angle(h, k) \equiv \angle(h, k).$$

Отметим, что Гильберт прилагает большие усилия, чтобы явно зафиксировать рефлексивность равенства углов. Далее он вводит условие, что угол не зависит (с точностью до конгруэнтности) от порядка указания его сторон. Как и для отрезков, симметричность отношения конгруэнтности для углов не постулируется, а доказывается позже.

Последняя аксиома этой группы имеет дело с двумя треугольниками. Она напоминает теорему, известную как «первый признак равенства треугольников» в школьных учениках геометрии во многих странах, но в ее заключении не утверждается, что два треугольника конгруэнтны, — по веской причине: понятие конгруэнтности треугольников не является неопределяемым, и его определение будет дано позднее.

III₅. *Если для двух треугольников ABC и $A'B'C'$ имеют место конгруэнтности*

$$AB \equiv A'B', \quad AC \equiv A'C', \quad \angle BAC \equiv \angle B'A'C',$$

то имеет место также и конгруэнтность

$$\angle ABC \equiv \angle A'B'C'.$$

Легко видеть, что это первый признак конгруэнтности треугольников (SAS).

Сформулировав все аксиомы конгруэнтности, Гильберт дает еще несколько определений и ряд важных следствий из аксиом, пока что не используя аксиому о параллельных. Определяются понятия смежных и вертикальных углов, а также прямого угла (последний определяется как угол, конгруэнтный своему смежному). Затем следует явное определение понятия конгруэнтных треугольников как треугольников, у которых конгруэнтны все соответствующие стороны и все соответствующие углы.

После этого Гильберт доказывает *первый, второй и третий признаки равенства треугольников*. За ними следуют две теоремы о конгруэнтности углов (в частности, одна из теорем утверждает, что если два угла конгруэнтны, то и смежные им конгруэнтны). С помощью этих теорем доказывается, что любые два прямых угла

конгруэнтны. В этом месте Гильберт отмечает, что Евклид принял этот факт в качестве одной из аксиом, — «по моему мнению, неправильно», — комментирует он.

Далее, обозначая словом «фигура» конечное множество точек, Гильберт формулирует утверждение, которое он называет «наиболее общей теоремой о конгруэнтности». А именно, *если (A, B, C, \dots, L) и (A', B', C', \dots, L') суть две конгруэнтные плоские фигуры, а P — некоторая точка плоскости, то всегда найдется такая точка P' , что фигуры (A, B, C, \dots, L, P) и $(A', B', C', \dots, L', P')$ будут также конгруэнтны. Если фигура (A, B, C, \dots, L) содержит хотя бы три точки, не лежащие на одной прямой, то построение точки P' может быть выполнено только одним способом.*

IV. Аксиома о параллельных

Гильберт формулирует пятый постулат Евклида следующим образом:

IV. Пусть a — произвольная прямая, а A — точка вне ее; в таком случае в плоскости, определяемой прямой a и точкой A , существует не более одной прямой, проходящей через точку A и не пересекающей прямую a .

Определение. Из предыдущего и на основании аксиомы о параллельных мы знаем, что в плоскости, определенной прямой a и точкой A , существует одна и только одна прямая, проходящая через точку A и не пересекающая прямой a ; мы называем ее *прямой, параллельной a , проходящей через точку A* .

Интересно отметить, что в этой аксиоме Гильберт прибегает к традиционной терминологии, когда пишет «можно провести», а не более формально, например «существует». Заметим также, что для Гильберта параллельность не является отношением эквивалентности (она не рефлексивна) и ее определение включено в формулировку аксиомы. В отличие от Евклида, Гильберт не разделяет определения и аксиомы, так что определение параллельности появляется в аксиоме IV.

Теперь Гильберт наконец начинает пользоваться аксиомой о параллельных и формулирует теорему о конгруэнтности соответственных и накрест лежащих углов, образованных двумя параллельными и секущей. Интересно отметить, что Гильберт не рассматривает логически мыслимый случай, когда третья прямая пересекает одну из двух параллельных, но не другую. Невозможность этого случая есть

очевидное следствие аксиомы Гильберта о параллельных, и Гильберт, видимо, понимал, что это будет очевидно для любого читателя.

Последняя теорема, которую формулирует Гильберт после аксиом первых четырех групп, гласит: *сумма углов треугольника равна двум прямым*. Он не объясняет, что подразумевается под «суммой» углов, но, разумеется, сумма понимается в геометрическом смысле: теорема не означает, что сумма (мер) трех углов равна 180° ; ее смысл в том, что если последовательно откладывать углы данного треугольника от некоторой прямой, то второй луч третьего угла будет лежать на прямой, от которой мы начали откладывать углы.

Разумеется, не случайно, что Гильберт здесь останавливается: он, несомненно, понимает ключевую роль этой теоремы в вопросе о евклидовой и неевклидовой геометрии.

V. Аксиома непрерывности

Это последняя аксиома в системе Гильберта. Обычно ее называют *аксиомой Архимеда* и включают в аксиоматическое определение вещественных чисел. В геометрической форме она утверждает, что если откладывать некоторый отрезок вдоль прямой достаточно много раз, то мы в конце концов достигнем любой данной точки на этой прямой. Формулировка Гильберта такова:

V₁. Пусть AB и CD — два каких-нибудь отрезка; тогда на прямой AB существует конечное число таких точек $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, что отрезки $AA_1, A_1A_2, A_2A_3, \dots, A_{n-1}A_n$ конгруэнтны отрезку CD и точка B лежит между A и A_n .

Читатель мог обратить внимание на слово «конгруэнтны» в формулировке аксиомы. Оно показывает, что Гильберт здесь имеет дело с отрезками, а не длинами отрезков (вещественными числами).

Хотя в первом издании аксиоматики Гильберта эта аксиома была последней, во французском издании своей книги он добавил еще одну аксиому, которую назвал «аксиомой линейной полноты». Эта аксиома, по выражению Гильберта, «не чисто геометрической природы», и смысл ее добавления в том, чтобы обеспечить взаимно однозначное соответствие точек произвольной прямой с вещественными числами, тем самым сделав аксиоматику Гильберта категоричной.

Непротиворечивость аксиом Гильберта

Гильберт устанавливает *непротиворечивость* своей аксиоматики (т. е. показывает, что его аксиомы не приводят к противоречию), построив модель своей планиметрии.

А именно, Гильберт вводит обозначение Ω для множества алгебраических чисел, которые можно получить из числа 1 посредством четырех арифметических операций и операции $\sqrt{1 + \omega^2}$, где ω — какое-либо из ранее определенных чисел. Множество Ω состоит из вещественных чисел и заведомо счетно. В этой модели пара (x, y) , где $x, y \in \Omega$, называется *точкой*, тройка $(u : v : w)$, где $u, v, w \in \Omega$ и $u^2 + v^2 \neq 0$, называется *прямой*, и мы говорим, что точка (x, y) *принадлежит прямой* $(u : v : w)$, если

$$ux + vy + w = 0.$$

Затем Гильберт отмечает, что аксиомы групп I, IV очевидным образом выполнены. Далее, используя обычное отношение порядка $(x < y)$ на числовом множестве Ω , он естественным образом определяет отношение *лежит между* для трех точек на прямой. Легко проверить, что тогда аксиомы группы II также выполняются.

Определив понятие *конгруэнтности* так, как это обычно делается в аналитической геометрии, Гильберт отмечает, что выполнены и аксиомы группы III (включая относящиеся к откладыванию отрезков и углов). Остается лишь аксиома группы V (аксиома Архимеда), но она, разумеется, выполнена на множестве $\Omega \subset \mathbb{R}$.

Таким образом, Гильберт построил модель евклидовой планиметрии в арифметике алгебраических чисел; в этой модели неопределяемые понятия «точка», «прямая», «принадлежать», «лежать между», «конгруэнтны» приобретают конкретное истолкование, причем все аксиомы евклидовой планиметрии выполнены.

Это означает, что *любое противоречие, вытекающее из системы аксиом Гильберта, должно появляться и в арифметике множества Ω* . Поэтому можно утверждать, что *аксиоматика Гильберта (без аксиомы линейной полноты) непротиворечива, если нет противоречий в теории алгебраических чисел*.

Заключение

Следует, как бы то ни было, отметить, что в гильбертовой модели планиметрии *количество точек, как и количество прямых, счетно*. Разумеется, можно построить и несчетную модель этой геометрии, с множеством точек мощности континуум, просто используя декартовы координаты, как в курсе аналитической геометрии. Таким образом, аксиоматика Гильберта, как говорят логики, *некатегорична*, т. е. может иметь неизоморфные модели.

Считая это недостатком, Гильберт в позднейших изданиях своего труда добавил упомянутую выше аксиому *линейной полноты*, которая означает примерно следующее: к прямой нельзя добавить дополнительные точки, не нарушив другие аксиомы. Из этой аксиомы с учетом аксиомы Архимеда немедленно вытекает, что между точками прямой и вещественными числами существует (взаимно однозначное) соответствие, сохраняющее порядок.

Почему Гильберт не захотел намного упростить дело для себя и своих читателей, начав прямо отсюда и приняв этот простой и фундаментальный факт в качестве аксиомы? Прежде всего, он, несомненно, стремился, чтобы его геометрия формально не зависела от теории вещественных чисел, являясь примером «чистой геометрии». Однако невозможно уйти от того факта, что любое строгое изложение евклидовой планиметрии (в нашем понимании) приведет к неявному построению теории вещественных чисел как множества всех точек на прямой, где сложение определено как прикладывание одного отрезка к другому, порядок определен через отношение «лежать между», а умножение — через гомотетию. Я склонен верить, что Гильберт преднамеренно шел на большие трудности, чтобы скрыть важнейшую роль поля \mathbb{R} в своих построениях: ведь он был осведомлен о том, что строгое построение евклидовой геометрии становится гораздо проще, если использовать \mathbb{R} с самого начала, а не задним числом.

Вот почему я не считаю, что следует обучать геометрии на основе аксиом Гильберта или какого-то иного усовершенствования подхода Евклида. Но такая точка зрения ни в коей мере не умаляет историческое значение работ Гильберта по основаниям геометрии. Он не только показал, что аксиоматический метод, восходящий к Евклиду и его современникам, может быть приведен в соответствие с критериями строгости, свойственными математике XX века. Гильберт был первым, кто ввел в обиход фундаментальную идею, что аксиоматически построенная математика — это наука, которая изучает... неопределяемые объекты!

Ответы и указания

Читатель не должен ожидать, что найдет здесь решения задач. Здесь приведены лишь ответы (без каких-либо комментариев) к тем из них, где требуется что-то вычислить или найти, а также указания к тем задачам (составляющим большинство), которые начинаются словами «Докажите, что...». Указания не содержат подробностей и написаны в очень неформальном стиле (студент не должен имитировать его в письменных домашних заданиях, если преподаватель их требует!); обычно они лишь намечают стратегию доказательства или некоторые его элементы или указывают в принципе, какого рода доказательство можно получить. В последнем случае мы пишем: *«не очень действенное указание»*. Заметим также, что практически все задачи в первых девяти главах снабжены ответами или указаниями, тогда как начиная с гл. 10 к большинству задач их нет. Так сделано потому, что к этому времени студент уже проработал половину книги и, как полагает автор, пора бросить его в воду и посмотреть, способен ли он плыть самостоятельно.

Глава 1

1.1. Имеется три поворота (порядка 1, 3, 3), три отражения от высот треугольника (все порядка 2) и четыре нетривиальные подгруппы (три группы порядка 2 и одна группа порядка 3); группа движений содержит 3 элемента.

1.2. а) Группа симметрий такой пирамиды изоморфна группе симметрий квадрата. В ней 8 элементов (пять — порядка 2, два — порядка 4 и один порядка 1), 6 нетривиальных подгрупп (пять — порядка 2, одна — порядка 4); группа движений состоит из 4 элементов.

б) Группа изоморфна группе перестановок S_4 (см. главу 2). Имеется 24 элемента порядков 1, 2, 3, в том числе 12 поворотов, 12 отражений относительно плоскостей (двух различных типов). Есть 19 нетривиальных подгрупп (пятнадцать — порядка 2 и четыре — порядка 3), группа движений содержит 12 элементов.

в) Имеется 48 элементов порядков 1, 2, 3, 4, из которых 24 являются поворотами (см. п. 1.2.3), а 24 меняют ориентацию; группа движений содержит 24 элемента.

г)* Имеется 120 элементов порядков 1, 2, 3, 4, 5, из которых 60 являются поворотами, а 60 меняют ориентацию; группа движений содержит 60 элементов.

д)* Группа симметрий икосаэдра изоморфна группе симметрий додекаэдра, поэтому ответы те же, что в п. г).

е) Имеется n поворотов, n отражений (двух различных типов, если n четно); нетривиальные подгруппы — подгруппа поворотов порядка n (имеющая нетривиальные подгруппы, порядки которых делят n), изоморфные копии группы диэдра D_m (см. главу 3) для всех m , делящих n , и n подгрупп отражений (порядка 2); группа движений содержит n элементов.

1.3. Достаточно поместить квадрат на одну из граней куба (соответственно окружность на экватор сферы) и проверить, что различные движения этой грани (соответственно экватора) можно продолжить до различных движений куба (соответственно сферы).

1.4. Всегда, когда n делит m .

1.5. Есть 7 таких подгрупп, из которых 4 состоят из поворотов.

1.6. Четыре главные диагонали.

1.7. а) Одно отражение относительно плоскости, проходящей через ребро и середину противоположного ребра, и один поворот вокруг прямой, соединяющей середины противоположных ребер.

б) Отражение относительно плоскости, проходящей через параллельные диагонали противоположных граней, и композиция другого такого отражения с центральной симметрией относительно центра куба.

1.8. (а, б, в). Например, любой тетраэдр, вершинами которого являются: вершина исходного многогранника A , середина ребра AB , центр грани, содержащей AB , и центр самого многогранника.

1.9. От единичной сферы в \mathbb{R}^3 отрежем две маленькие симметричные шапочки плоскостями, параллельными координатной плоскости Oxy ; тогда множество прямых, проходящих через начало координат и оставшуюся часть сферы, является листом Мёбиуса.

1.10. Ось поворота есть пересечение данных плоскостей, а угол поворота — удвоенный угол между плоскостями.

1.11. Композиция двух поворотов сферы есть поворот. Его ось — пересечение двух плоскостей, каждая из которых проходит через ось одного из данных поворотов и образует угол, вдвое меньший угла этого поворота, с плоскостью, проходящей через обе эти оси.

Глава 2

2.1. \mathbb{Z}_2 (симметрии единичного отрезка), \mathbb{Z}_3 (повороты равностороннего треугольника), \mathbb{Z}_4 (повороты квадрата), группа Клейна $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ (симметрии прямоугольника), \mathbb{Z}_5 (повороты правильного пятиугольника), S_3 (симметрии правильного треугольника), \mathbb{Z}_6 (повороты правильного шестиугольника).

2.2. а) Единственная нетривиальная нормальная подгруппа в группе $\text{Sym}(\Delta)$ — это подгруппа поворотов, и соответствующая факторгруппа изоморфна \mathbb{Z}_2 .

б) Подгруппа всех поворотов и 4-элементная подгруппа (изоморфная группе Клейна), которая состоит из тождественного преобразования и трех поворотов на угол π вокруг прямых, соединяющих середины двух противоположных ребер.

2.3. Не очень действенное указание. Доказательство сводится к проверке определений.

2.4. Указание. Если H — подгруппа в G , то нужно доказать, что для всех $g \in G$ выполнено включение $g^{-1}Hg \subset H$; возьмем любой элемент $h \in H$, рассмотрим два случая ($hg \in H$ и $hg \notin H$) и докажем нужное включение — в первом случае оно очевидно, а во втором следует из того, что есть только два смежных класса по подгруппе H .

2.5. Орбитами являются циклы $(1 \rightarrow 5 \rightarrow 4 \rightarrow 9 \rightarrow 1)$, $(2 \rightarrow 8 \rightarrow 2)$, (3) , $(6 \rightarrow 10 \rightarrow 7)$, стабилизатором элементов первой орбиты — множество $\{1, a^4, a^8\}$, второй — $\{1, a^2, \dots\}$, третьей — вся группа, четвертой — $\{1, a^3, a^6, a^9\}$, где a — данная перестановка.

2.6. а) 6; б) 60.

2.7. 16.

2.8. Указание. Вначале докажите, что S_n порождается перестановками σ_i соседних элементов (i и $i+1$), а затем — что любая перестановка σ_i сопряжена перестановке $(1\ 2)$ посредством подходящей степени числа $(1\ 2 \dots n)$.

2.9. $\langle s_1, s_2 : s_1 s_2 s_1 = s_2 s_1 s_2, s_1^2 = 1, s_2^2 = 1 \rangle$; другая возможность: $\langle p, q : p^2 = 1, q^3 = 1, (pq)^2 = 1 \rangle$; есть и несколько других.

2.10. 36, включая 18 эпиморфизмов.

2.11. Изоморфизм между данной группой и D_n можно построить, поставив a в соответствие одному из поворотов на угол π , а b — повороту на $2\pi/n$.

2.12. Не очень действенное указание. Есть много способов показать, что $a = 1$: например, можно начать с данной формулы

$b^{-1}ab = a^2$ и подходящим образом применить тривиальные соотношения и соотношения $a^5 = b^3 = 1$.

Глава 3

3.1. Группа симметрий — группа диэдра \mathbb{D}_6 , группа движений — \mathbb{Z}_6 , обе они являются конечными подгруппами в $O(3)$ согласно следствию 3.2.9.

3.2. а) $\widetilde{\mathbb{D}}_6$ и \mathbb{Z}_6 ; б) \mathbb{D}_5 и \mathbb{Z}_5 ; в) $\widetilde{\mathbb{D}}_6$ и \mathbb{Z}_6 .

3.3. *Указание.* Попробуйте выразить два слагаемых в правой части через количество точек в орбите и количество элементов стабилизаторов в случае группы движений куба. В общем случае слагаемые принимают те же значения и, как можно видеть, уравнение практически сводится к тавтологии — оно выражает два способа вычисления мощности множества F .

3.4. Да, любая группа изометрий, оставляющая на месте вписанный правильный тетраэдр.

3.5. Нет, поскольку 60 не делится на 24.

3.6. Имеется шесть подгрупп, изоморфных \mathbb{Z}_2 , четыре изоморфных \mathbb{Z}_3 и три изоморфных \mathbb{D}_4 .

3.7. Пусть $[M_1, N_1]$ и $[M_2, N_2]$ — стороны пятиугольников, расположенных на верхней грани куба (см. рис. 3.6), а Π — вертикальная плоскость, параллельная $[M_1, N_1]$ и $[M_2, N_2]$ и пересекающая куб на две конгруэнтные части. Будем вращать пятиугольники вокруг сторон $[A, D]$ и $[B, C]$, пока $[M_1, N_1]$ и $[M_2, N_2]$ не попадут в плоскость Π . Из соображений симметрии легко видеть, что стороны $[M_1, N_1]$ и $[M_2, N_2]$ сольются: $M_1 = M_2 =: M$ и $N_1 = N_2 =: N$. Пусть P — середина отрезка $[M, N]$, S — середина $[B, C]$, R — середина $[C, D]$. Продолжим отрезок $[M, R]$ отрезком $[R, Q]$ длины, равной $|PS|$, и пусть K — проекция точки Q на переднюю, а H — проекция точки P на верхнюю грань куба. Теперь достаточно доказать, что треугольники RKQ и SHP конгруэнтны, но это нетрудно.

3.8. Непосредственная проверка показывает, что G^+ действует на множестве F . Имеется три орбиты (по одной для трех различных типов точек в F , соответствующих граням, ребрам и вершинам); стабилизаторы точек, соответствующих граням, ребрам и вершинам, состоят из 3, 1 и 2 элементов соответственно; это повороты на углы, кратные углам $\frac{\pi}{2}$, π и $\frac{2\pi}{3}$ соответственно. Вершины куба — те элементы из F , стабилизаторы которых содержат ровно два элемента.

3.9. Эта задача похожа на задачу 3.8, но несколько проще.

3.10. Эта задача похожа на задачу 3.8, но несколько сложнее.

3.11. Указание. Доказательство аналогично указаниям к задаче 3.8 с тем исключением, что в качестве вершин октаэдра нужно взять те элементы из F , стабилизаторы которых содержат ровно три элемента.

Глава 4

4.1. Указание. Пусть $[A', B']$ — образ отрезка AB при данном движении. Если прямые $[A, B]$ и $[A', B']$ параллельны, то легко показать, что движение является параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{AA'}$. В противном случае получаем поворот, центр которого легко строится.

4.2. Указание. Пусть $[A', B']$ — образ отрезка $[A, B]$ при данной изометрии. Параллельным переносом переведем $[A', B']$ в $[A'', B'']$, где $A'' \equiv A$. Осью скользящей симметрии тогда будет прямая, проходящая через середину отрезка $[A, A']$ и параллельная биссектрисе угла BAB'' .

4.3. Не очень действенное указание. Правильность построения по существу вытекает из того факта, что сумма углов евклидова треугольника равна π . При $\varphi = \psi$, очевидно, получается параллельный перенос на вектор, соединяющий первый центр поворота со вторым.

4.4. Указание. Центр поворота получается из центра данного поворота сдвигом на вектор, противоположный вектору данного параллельного переноса.

4.5. Не очень действенное указание. Очевидно, что данная композиция — поворот, указанный в условии задачи.

4.6. а) Два параллельных переноса.

б) Два параллельных переноса и один поворот на угол π .

в) Два взаимно перпендикулярных параллельных переноса на два квадрата и один поворот на угол π .

г) Два поворота на угол $2\pi/3$ и два параллельных переноса.

д) Два поворота на угол $2\pi/3$ и два параллельных переноса.

е) Два отражения и два параллельных переноса (на удвоенные стороны прямоугольников).

4.7. Нет.

4.8. Есть два типа таких точек: во-первых, вершины квадратов, около которых расположены точки двух вопросительных знаков (соответствующие подгруппы состоят из поворотов на угол π); во-вто-

рых, вершины квадратов, вблизи которых нет точек (соответствующие подгруппы состоят из поворотов на угол $\pi/2$).

4.9. Например, группа, сохраняющая квадратную решетку, может быть представлена в виде $\langle h, v, r : hvh^{-1}v^{-1} = 1, rvr^{-1}v^{-1} = 1, r^4 = 1 \rangle$.

4.10. Только кубы.

4.11. Картинка слева соответствует дискретной геометрии, показанной на рис. 4.5а), а картинка справа — средней картинке во втором ряду на рис. 4.6.

4.12. Группа, первая слева во втором ряду на рис. 4.6.

4.13. Группа, показанная на рис. 4.5в, и средняя в последнем рядах на рис. 4.6.

4.14. Группа, показанная на рис. 4.5в, и средние в первом и третьем рядах на рис. 4.6.

4.15. Группы, показанные на рис. 4.5б, е, справа в первом и втором ряду на рис. 4.6 и слева в третьем ряду.

4.16. Поверните все знаки вопроса в замощении в) в горизонтальное положение с точкой справа.

Глава 5

5.1. Когда оба угла — рациональные кратные угла π . В этом случае пусть $\alpha = k\pi/p$ и $\beta = l\pi/q$, где k и p взаимно просты, так же как l и q . Тогда в качестве фундаментальной области можно взять любой двугранный угол, содержащий z -оси и равный $(\text{НОД}(k, l)/\text{НОК}(p, q)) \cdot \pi$.

5.2. а) В точности тогда, когда треугольник — один из трех треугольников Кокстера.

б) Сам треугольник будет фундаментальной областью.

5.3. Да, эта группа определяет геометрию Кокстера, а именно геометрию Кокстера с равносторонним треугольником в качестве фундаментальной области.

5.4. Например, в случае равностороннего треугольника и вершины $s_1 \cap s_2$ это два отражения s_1 и s_2 и два поворота на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$, т. е. $s_1 \circ s_2$ и $(s_1 \circ s_2)^2$.

5.6. Указание. Можно доказать этот факт, рассмотрев семь многогранников Кокстера или непосредственно, используя определение двугранных углов Кокстера.

5.7. Не очень действенное указание. а) Очевидно. б) Следует из а).

5.8. Например, \widetilde{B}_5 — неправильный многогранник с пятью гранями; одна грань образует двугранные углы, равные $\pi/4$, с двумя

другими, а одна из этих двух образует двугранные углы, равные $\pi/3$, с двумя оставшимися, которые ортогональны друг другу.

5.9. а) Нет; б) да; в) нет; г) нет.

Глава 6

6.1. *Не очень действенное указание.* Доказательство является упражнением в стереометрии, похожим на доказательство сферической теоремы синусов.

6.2. *Не очень действенное указание.* Доказательство является упражнением в стереометрии, похожим на доказательство сферической теоремы синусов.

6.3. *Указание.* Пусть данный треугольник обозначен ABC . Рассмотрим тетраэдр $OABC$, где O — центр сферы, и используем тот факт, что три точки A, B, C лежат в одной полусфере.

6.4. Нет. Этот аналог непосредственно вытекает из соответствующих теорем косинусов.

6.5. Геодезическая между Москвой и Нью-Йорком пересекает Гренландию, но не Испанию.

6.6. π и 3π .

6.7. *Указание.* Примените сферический аналог теоремы Пифагора.

6.8. *Указание.* Используя значение r , вычислите евклидов радиус окружности и подставьте его в классическую формулу для площади сферической шапки.

6.9. *Указание.* Например, в случае куба фундаментальной областью является пирамида $OIAH$, где O — центр симметрии куба, I — центр нижней грани $ABCD$, H — основание перпендикуляра, опущенного из I на AB . В совокупности 48 экземпляров фундаментальной области заполняют куб — это можно установить и не подсчитывая количество пирамид, которые в действительности при этом используются.

6.10. *Указание.* Постройте вписанную и описанную окружности треугольника ABC , рассматриваемого как евклидов треугольник в плоскости ABC , а затем спроектируйте их на сферу из ее центра O .

6.11. *Указание.* См. указание к предыдущей задаче.

Глава 7

7.1. *Указание.* Можно найти уравнение образа данной окружности, считая ее лежащей на \mathbb{C} и подставив в ее уравнение $z = 1/\bar{z}$.

Есть и чисто геометрические решения, как правило использующие подобие прямоугольных треугольников.

7.2. Указание. Пусть M — произвольная точка данной окружности \mathcal{C} , ортогональной к окружности инверсии \mathcal{C}_0 радиуса 1 с центром O . Пусть S — точка пересечения перпендикуляра к OM с \mathcal{C}_0 , а N — пересечение прямой OM с \mathcal{C} . Тогда три прямоугольных треугольника OSM , SNM и ONS подобны, откуда немедленно следует, что $|OM| \cdot |ON| = 1$.

7.3. Указание. Доказательство использует подобие прямоугольных треугольников в духе предыдущей задачи.

7.4. Указание. Доказательство использует подобие прямоугольных треугольников в духе двух предыдущих задач.

7.5. Указание. Доказательство использует подобие прямоугольных треугольников в духе трех предыдущих задач.

7.6. Указание. Пусть P — точка внутри данной окружности \mathcal{C} , а M, N — точки пересечения прямой OP с \mathcal{C} . Тогда $|OM| \cdot |ON| = 1$, откуда легко следует требуемая биективность.

7.7. Указание. Рассмотрим любую гиперболическую изометрию α , которая переводит (евклидов!) центр данной окружности \mathcal{C} в центр O модели на круге. Тогда $\alpha(\mathcal{C})$ — одновременно гиперболическая и евклидова окружность. Следовательно, это верно для $\alpha^{-1}(\alpha(\mathcal{C}))$. Нет, в общем случае центры в двух геометриях не совпадают (они совпадают, лишь если центром является начало координат).

7.8. Указание. В данном случае гиперболическая плоскость замощена и правильными семиугольниками, и равносторонними треугольниками, причем каждый семиугольник содержит 7 треугольников. Эти треугольники задают геометрию Кокстера. Углы треугольников равны $2\pi/7$, а углы при вершинах семиугольников равны $4\pi/7$.

7.9. Указание. Утверждение можно проверить прямым вычислением сначала для инверсии $z \mapsto p/\bar{z}$, $p > 0$, а затем для произвольной инверсии, используя ее сопряжение параллельным переносом, переводящим центр инверсии в точку $(0; 0) \in \mathbb{C}$.

7.10. Указание. Решение использует двойное отношение четырех точек и не является легким. Ответ см. в следующей главе.

7.11. Указание. Один из многочисленных способов отобразить флаг (A, l, Π) во флаг (A', l', Π') состоит в следующем. Вначале применим (гиперболическую) изометрию α , переводящую A в A' , а затем изометрию β , переводящую A' в центр круга O ; тогда $\beta(\alpha(l))$ и $\beta(l')$ будут диаметрами круга, а симметрия γ относительно бис-

сектрисы угла между ними поменяет их местами. Далее, отображение $\varphi := \beta^{-1} \circ \gamma \circ \beta \circ \alpha$ переводит A в A' , а l в l' ; если $\varphi(\Pi)$ совпадает с «полуплоскостью» Π' , доказательство завершено, а в противном случае искомая изометрия есть композиция отображения φ и симметрии относительно l' .

7.12. Указание. Рассмотрим малый правильный пятиугольник с центром симметрии в центре круга \mathbb{L}^2 . При увеличении размера пятиугольника его углы уменьшаются и по непрерывности будут в какой-то момент равны $2\pi/5$. Этот пятиугольник будет фундаментальной плиткой. Другие плитки будем присоединять последовательно таким образом, чтобы к каждой вершине примыкало пять плиток.

7.13. Не очень действенное указание. Эта теория напоминает и ненамного превосходит по сложности двумерную теорию инверсии, изложенную в начале гл. 7.

7.14. Указание. Используйте тот факт, что любая окружность есть пересечение двух сфер, а любая прямая — пересечение двух плоскостей.

7.15. Указание. Используйте подходящие факты из трех предыдущих задач и конструкцию, аналогичную конструкции из задачи 7.3.

7.16. Указание. Плоскости в этой модели — пересечения шара со сферами, ортогональными абсолюту (т. е. граничной сфере данного шара); прямые — окружности, ортогональные абсолюту; изометрии — композиции отражений относительно гиперболических плоскостей.

7.17. Не очень действенное указание. Задача легко сводится к умеренно трудной задаче об ортогональных окружностях из элементарной евклидовой планиметрии.

7.18. Указание. Это тоже задача из геометрии окружностей, с многими возможными решениями. Одно из них состоит в следующем: построим общий перпендикуляр к двум данным прямым, через его середину N проведем третью параллельную прямую n , затем переведем n некоторой изометрией α в прямую n_0 , проходящую через A_∞ и M , и завершим построение, отразив весь чертеж относительно n_0 и применив изометрию α^{-1} .

7.19. Указание. Ваша первая догадка насчет ответа, скорее всего, верна!

Глава 8

8.1. Не очень действенное указание. Оба утверждения а) и б) можно доказать непосредственным вычислением.

8.2. Указание. Пусть K — точка пересечения серединного перпендикуляра к отрезку $[A, P]$ с прямой l . Одна из искомым окружностей (а именно проходящая через A) имеет центр K и радиус $|KP|$.

8.3. Указание. Посредством преобразования Ω^{-1} (см. пример 8.1.1) можно перейти от ситуации, описанной в условии, к модели Пуанкаре на круге, где задача получает следующий вид: провести через данную точку две прямые, параллельные данной. Затем вернемся в исходную ситуацию посредством Ω . Разумеется, существует и прямое доказательство в духе предыдущей задачи.

8.4. Указание. Вначале проверьте, что данное преобразование переводит круг \mathbb{L}^2 в себя, а затем убедитесь, что данная формула выполнена всегда, когда преобразование состоит из четного количества отражений относительно окружностей, ортогональных абсолюту.

8.5. Указание. Здесь применимо указание к задаче 7.11.

8.6. $\pi - \alpha - \beta - \gamma$, где α, β, γ — углы треугольника.

Глава 9

9.1. Не очень действенное указание. Примените формулу функции расстояния.

9.2. Не очень действенное указание. Докажите от противного.

9.3. Указание. Утверждение немедленно следует из единственности перпендикуляра из данной точки к данной прямой и определения отражений.

9.4. Указание. Рассмотрите композицию отражений относительно двух прямых и используйте задачу 9.3.

9.5. Указание. Рассмотрите отражение относительно одного перпендикуляра, а затем относительно другого.

9.6. Указание. Предположите противное и, используя свойства модели, верные также в евклидовой геометрии (например, свойства расстояния, перечисленные в п. 9.1.2, а также существование и единственность перпендикуляров), покажите, что тогда выполняется пятый постулат Евклида.

9.7. Указание. Это невозможно: наличие структуры линейного пространства в модели означает, что существуют подобные, но не конгруэнтные треугольники, но это, как нетрудно видеть, равносильно пятому постулату Евклида.

9.8. Указание. Возьмем равносторонний треугольник (в евклидовом смысле) с вершинами на абсолюте. Тогда пригоден другой

равносторонний треугольник с вершинами внутри него, достаточно близкими к абсолюту.

Глава 10

10.8. Указание. Возьмем очень маленький равносторонний треугольник ABC (углы которого близки к $\pi/3$) с центром симметрии в центре O модели Пуанкаре на круге, произведем гомотетию с центром O и очень большим коэффициентом и рассмотрим углы образа треугольника ABC .

10.9. Указание. а) Доказательство требует нетривиальных вычислений, см. [16, с. 149–151]. б) Примените предыдущую формулу, а также формулу $e^d = \text{sh}(d) + \text{ch}(d)$, аналогичную знаменитой формуле Эйлера для e^{-d} и столь же легко доказываемую.

Глава 12

12.9. Теорема Брианшона может быть сформулирована следующим образом: пусть a, b, c, d, e, f — касательные к конике, а l, m, n — прямые, проходящие через точки $L_1 = a \cap b$ и $L_2 = e \cap d$, $M_1 = a \cap f$ и $M_2 = c \cap d$, $N_1 = c \cap b$ и $N_2 = e \cap f$ соответственно. Тогда три прямые l, m, n пересекаются в одной точке. Доказательство двойственно доказательству теоремы Паскаля.

Глава 13

13.1. Не очень действенное указание. Утверждение может быть доказано прямым вычислением в координатах.

13.5. Указание. В южной полусфере вблизи экватора возьмем треугольник площади, меньшей чем ε . Можно проверить, что площадь его образа при центральном проектировании может быть сколь угодно велика.

Глава 14

14.1. Линейные пространства $AF(2)$ и $AF(3)$ над полями из 2 и 3 элементов можно рассматривать как аффинные геометрии с 4 и 9 элементами соответственно. Но их можно построить и не используя конечных полей. А именно, аффинная геометрия на четырех точках a, b, c, d состоит из шести прямых ab, bc, cd, da, ac, bd , три пары которых (ab и cd , dc и da , ac и bd) параллельны. Ее можно также описать как проективную плоскость Фано, из которой уда-

лены «бесконечно удаленные точки». Аффинную геометрию на 9 точках также можно построить непосредственно; рекомендуем читателю изобразить $AF(3)$ в стиле рис. 14.1.

Глава 15

15.7. Если бы включение имело место, сферические прямые были бы подмножествами проективных прямых, но тогда каждая пара сферических прямых имела бы не более одной общей точки.

Глава 16

16.1. w_m , где $m = \text{НОК}(k, l)$.

Литература

1. Берже М. Геометрия. Т. 1, 2. М.: Мир, 1984.
2. Бердон А. Геометрия дискретных групп. М.: Физматлит, 1986.
3. Гильберт Д. Основания геометрии. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
4. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. Т. I, II. М.: УРСС, 1998.
5. «Начала» Евклида. М.; Л.: Гостехиздат, 1948.
6. Ефимов Н. В. Высшая геометрия. М.: Физматлит, 2004.
7. Лобачевский Н. И. Три сочинения по геометрии. М.: Гостехиздат, 1956.
8. Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию её идей / Под ред. А. П. Нордена. М.: ГТТИ, 1956.
9. Пуанкаре А. Наука и гипотеза // О науке. М.: Наука, 1983.
10. Bruck R. H., Ryser H. J. The non-existence of certain finite projective planes // Canad. J. Math. 1949. Vol. 1. P. 88—93.
11. Coxeter H. S. M. Projective Geometry. Toronto, 1942.
12. Cayley A. Collected Papers. Cambridge, 1889.
13. Grünbaum B. Which symmetry groups are present in the Alhambra // Not. Amer. Math. Soc. 2005. Vol. 53, № 6.
14. Heath T. L. The Thirteen Books of Euclid's Elements. Cambridge, 1926.
15. Riemann B. Gesammelte Mathematische Werke. Leipzig, 1892.
16. Wolfe H. E. Non-Euclidean Geometry. N.Y.: Dryden Press, 1945.

Указатель терминов

В этом указателе перечислены в алфавитном порядке все математические термины, которые определяются в этой книге (как правило, в основном тексте они даны курсивом в том месте, где приведено определение).

- абсолют 122, 135
- аксиома Архимеда 244
 - линейной полноты 244
 - непрерывности 244
 - параллельности 243
 - Паша 240
- аксиомы конгруэнтности 240
 - порядка 239
 - соединения 238
- аффинное преобразование 132
 - пространство 103
- Бельтрами 163
- бесконечно удаленная точка 166
- Бойяи 161
- вектор закрепленный 17
 - свободный 17
- векторное пространство 102
- вертикальные углы 10
- выпуклое множество 33
- выпуклый многогранник 33
- вычеты по модулю m 55
- Гаусс 159
- геометрия в смысле Клейна 47
 - евклидова 8
 - замощения 87
 - Кокстера 95
- Гильберт 5, 163
- гиперболическая плоскость 122
- гомоморфизм 45, 57
- группа 53
 - абелева 54
 - замощения 87
 - коммутативная 54
 - кристаллографическая 89
 - Ли 218
 - отражений 93
 - перестановок 44, 55
 - симметрий квадрата 39, 40
 - симметрий равностороннего треугольника 39
 - циклическая 55
- движение 36
- двойное отношение 132
- двуугольник 108
- джойн 221
- дискретное действие группы 86
- додекаэдр 76
- Евклид 5
- евклидова плоскость 8
- евклидово пространство 103
- замощение Пенроуза 84
 - Фордерберга 83
- изометрия 9, 36
- изоморфизм 46
 - геометрий 49
- инверсия 116
- инволюция 118
- инцидентность 171
- каноническое расслоение Грассмана 219
- классифицирующее пространство 221
- Клейн 4, 47
- конечная аффинная плоскость 191
 - — — над полем 189, 192

- конечное поле 188
коника 172
константа Швейкарта 153
лежать между 239
Лобачевский 160
многогранник Кокстера 95
многообразие Грассмана 219
— Штифеля 219
многоугольник Кокстера 95
модель Кэли—Клейна 138
— Пуанкаре 135
мономорфизм 46
морфизм геометрий 48
нейтральный элемент 53
неопределяемые понятия 237
непротиворечивость 244
образующие группы 56
обратный образ 218
— элемент 53
общее положение 168
общие понятия 226
однородные координаты 165
окружность 14
определяющие соотношения 62
орбита 44
ортогональная группа 103
ортонормированное векторное пространство 103
осевая симметрия 34
отражение от плоскости 32
параллелограмм 17
параллельные плоскости 32
— прямые 9
— — в гиперболической плоскости 124
— — в модели Кэли—Клейна 140
— — в пространстве 31
параллельный перенос 17, 18, 33
перпендикулярность 10
— прямой и плоскости 32
плоский тор 214
— цилиндр 215
плоскость Фано 193
поворот 14
— вокруг оси 33
подгеометрия 49
подгруппа 46, 57
— нормальная 59
полная линейная группа 56, 102
поляра 107
порядок группы 46
— элемента группы 46
правильное замощение 87
проективная двойственность 171
— плоскость 164
проективное пространство 166, 177
пятый постулат 157, 225
расслоение геометрическое 220
— главное 220
— Хопфа 215
расстояние 8
— в модели Кэли—Клейна 138
— Лобачевского 150
— Мёбиуса 136
расходящиеся прямые 124, 140
риманова сфера 116
свободная группа 56, 60
симметрия скользящая 28
смежный класс 58
соседние углы 10
соты 87
Софус Ли 6
стабилизатор 44
сумма углов 10
схема Кокстера 98
теорема Дезарга 173
— Лагранжа 58
— Паппа 176

- | | |
|-----------------------------------|-------------------------------|
| — Паскаля 176 | формула классов 44 |
| тождество Артина 62 | фундаментальная область 45 |
| треугольник 16 | — плитка 87 |
| угол 10 | центральная симметрия 14 |
| — параллелизма 152 | эквивариантное отображение 48 |
| универсальное G -расслоение 221 | эллиптическая геометрия 114 |
| факторгруппа 60 | эпиморфизм 46 |
| фёдоровские группы 84 | Эрлангенская программа 47 |

Научное издание

Алексей Брониславович Сосинский

ГЕОМЕТРИИ

Подписано в печать 23.05.2017 г. Формат 60 × 90 1/16. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 16,5. Тираж 1000 экз. Заказ № 4519.

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241-08-04.

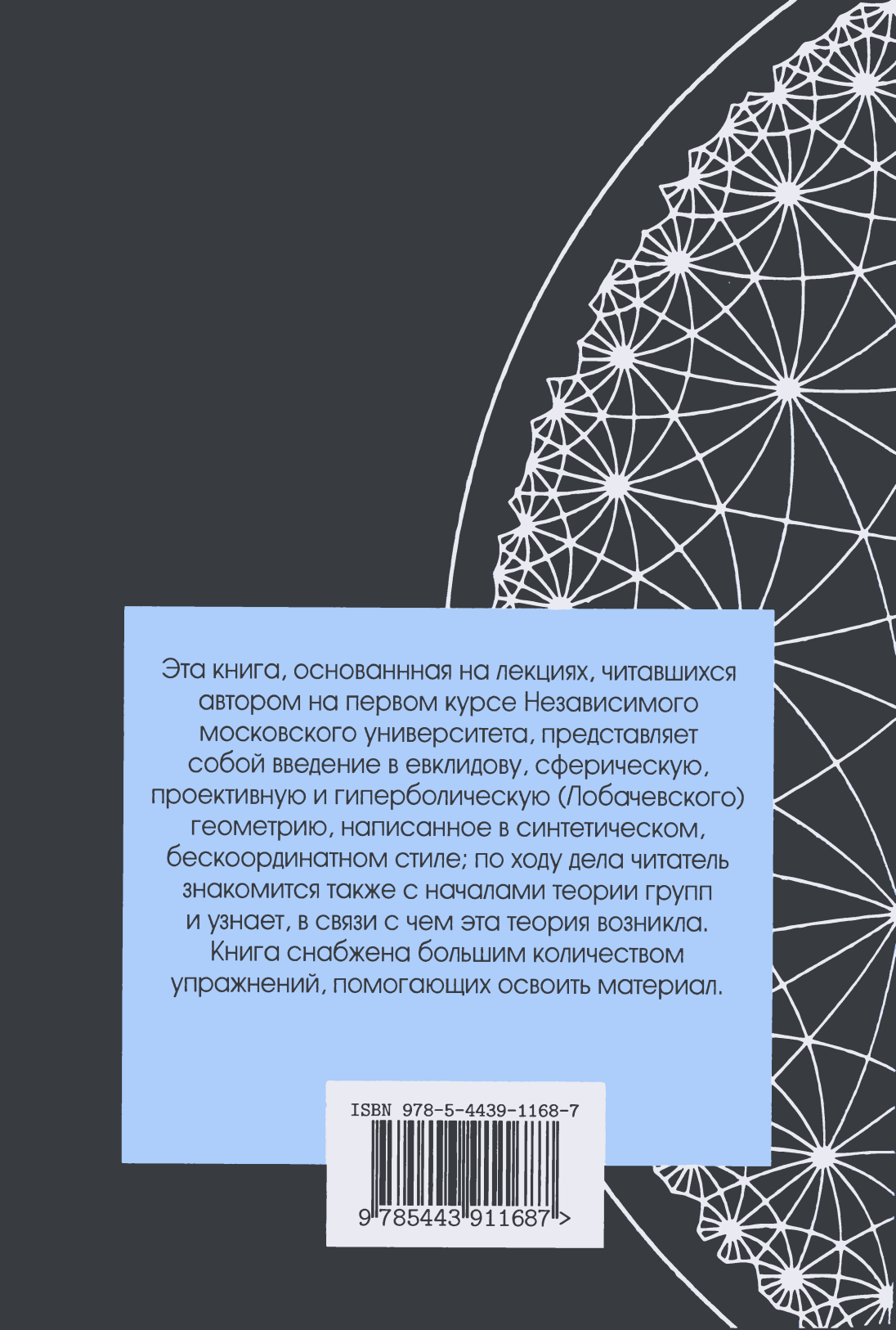
Отпечатано в ООО «Типография „Миттель Пресс“».

г. Москва, ул. Руставели, д. 14, стр. 6.

Тел./факс +7 (495) 619-08-30, 647-01-89.

E-mail: mittelpress@mail.ru

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745-80-31. E-mail: biblio@mccme.ru



Эта книга, основанная на лекциях, читавшихся автором на первом курсе Независимого московского университета, представляет собой введение в евклидову, сферическую, проективную и гиперболическую (Лобачевского) геометрию, написанное в синтетическом, бескоординатном стиле; по ходу дела читатель знакомится также с началами теории групп и узнает, в связи с чем эта теория возникла.

Книга снабжена большим количеством упражнений, помогающих освоить материал.

ISBN 978-5-4439-1168-7



9 785443 911687 >